אלגברה לינארית להנדסת מכונות פתרון דף 6

שאלה 1

סעיף ט: התשובה היא 56-. כדאי לפתח לפי השורה האחרונה כי יש בה שלושה אפסים.

סעיף יט:

ה) $\begin{vmatrix} \cos ה & \sin ג \\ -\sin ג & \cos ה \end{vmatrix} = \cos^2 ה + \sin^2 ה = 1$

שאלה 2

את הסעיפים בשאלה זו ניתן לפתור בשתי גישות:

גישה 1: לנסות להביא את המטריצה לצורה משולשית ע"י הפעלת פעולות שורה. חשוב לעקוב אחר השינויים שנגרמים לדטרמיננטה בעקבות פעולות השורה.

גישה 2: לבדוק מהי הדטרמיננטה עבור $n=1,2,3,4$ ואז לנסות להבין מהי התבנית ולהוכיח לכל n באינדוקציה

דוגמה לפתרון סעיף ו:

אפשרות בגישה 1: אפשר להפעיל פעולות שורה כדי שהמטריצה תהיה משולשית ואז אני יודע שהדטרמיננטה שלה היא מכפלת איברי האלכסון.

נבצע את הפעולות הבאות:

- נחליף שורה 1 עם שורה n
- " 2 עם " $n-1$
- " 3 " " $n-2$

וכך הלאה נבצע את כל ההחלפות מהצורה הזו. נזכור שכל פעם שמחליפים שתי שורות הדטרמיננטה מוכפלת ב-1- ולכן עלינו לחלק את התשובה למקרים לפי מספר ההחלפות שבוצעו

מקרה I: $2k=n$ (כלומר n זוגי)

במקרה זה אני מבצעים k החלפות שורה

מקרה 1.1: $k=2m$ כלומר $m\cdot 2^2=n$. במקרה זה

מספר החלפות השורה זוגי והדטרמיננטה מוכפלת ב-1.

מקרה 1.2: $k=2m+1 \Leftarrow n=4m+2$

מספר החלפות השורה אי-זוגי והדטרמיננטה מוכפלת ב--1.

מקרה II: $n=2k+1$.

גם כאן עדיין מבצעים k החלפות.

מקרה 2.1: $k=2m \Leftarrow n=4m+1$

הדטרמיננטה מוכפלת ב-1.

מקרה 2.2: $k=2m+1 \Leftarrow n=4m+3$

הדטרמיננטה מוכפלת ב--1.

אחרי תהליך הדירוג הדטרמיננטה היא פשוט מכפלת איברי האלכסון ולכן התשובה היא

$$\begin{cases} n! & n=4m \text{ או } n=4m+1 \\ -n! & n=4m+2 \text{ או } n=4m+3 \end{cases}$$

שאלה 3

סעיף i: התשובה היא $-50+6i$

סעיף ii: $\bar{1}\cdot\bar{1}-(-\bar{1})\cdot\bar{2}=\bar{1}-(-\bar{2})=\bar{1}+\bar{2}=\bar{3}$

שאלה 4

נבצע פעולות שורה כדי להביא את המטריצה לצורה מדורגת: נחסיר מכל שורה (החל מהשורה השניה) את השורה הראשונה:

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$\vdots$

$L_n \leftarrow L_n - L_1$

כך עברנו:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&1-x&1&\cdots&1\\1&1&2-x&\cdots&1\\\vdots&&&&\\1&1&1&\cdots&(n-1-x)\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&-x&0&\cdots&0\\0&0&1-x&\cdots&0\\\vdots&&&&\\0&0&0&\cdots&(n-2)-x\end{pmatrix}$$

המטריצה משולשית ולכן הדטרמיננטה שלה היא מכפלת איברי האלכסון. נשים לב שהפעולות שביצענו לא משנות את הדטרמיננטה. הדטרמיננטה היא

$$-x(1-x)(2-x)\cdot\ldots\cdot((n-2)-x)$$

בשאלה רצו שנשווה לאפס ונמצא את הפתרונות אז מהצורה הזו קל לראות שהפתרונות הם

$x=0,1,2,\ldots,n-2$ //

שאלה 5

נוכיח באינדוקציה על גודל המטריצה n.

מקרה בסיס: $n=2$ $(n_1=n_2=1)$

במקרה זה המטריצה אלכסונית $A=\begin{pmatrix}a_1&0\\0&a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}$

ואנחנו כבר יודעים ש: $\det(A)=a_1\cdot a_2=\det(A_1)\cdot\det(A_2)$

משום שזוהי בפרט מטריצה משולשית

צעד האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור מטריצת בלוקים אלכסונית מגודל $(n-1)\times(n-1)$ ונוכיח עבור גודל $n\times n$.

נפתח את $\det(A)$ לפי השורה הראשונה ב-A.

נסמן ב-$M_{1,j}$ את המטריצה המתקבלת מ-A ע"י הסרת השורה הראשונה והעמודה ה-j.

נשים לב לכך שלכל $n\geq j\geq 1$ המטריצה $M_{1,j}$ היא מטריצת בלוקים אלכסונית מגודל $(n-1)\times(n-1)$

וזה אומר שאנחנו יכולים להפעיל עליה את הנחת האינדוקציה. נסמן ב- $A^{(1)}_{1,j}$ את הבלוק השמאלי-עליון של $M_{1,j}$.

$$\det A = a_{1,1}\cdot\det(M_{1,1}) - a_{1,2}\cdot\det(M_{1,2}) + \dots + (-1)^{n} a_{1,n+1}\det(M_{1,n+1})$$

$$= a_{1,1}\cdot\det(A^{(1)}_{1,1})\cdot\det(A_2) - a_{1,2}\det(A^{(1)}_{1,2})\det(A_2) + \dots + (-1)^{n} a_{1,n+1}\det(A^{(1)}_{1,n+1})\det(A_2)$$

הנחת האינדוקציה

$$= \left[a_{11}\cdot\det(A^{(1)}_{1,1}) + \dots + (-1)^{n+1}\det(A^{(1)}_{1,n+1})\right]\det(A_2)$$

$$= \det(A_1)\cdot\det(A_2)$$

העובדה לגבי מטריצה אלכסונית נובעת מ"דית מתוצאה זו.

שאלה 6

נזכור ש- $\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$ וכן עבור $A\in M_{n\times n}(F)$ ו- $\lambda\in F$ מתקיים $\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$

א) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{a}$

זה נכון משום ש-:

$$1 = \det(I_{4\times4}) = \det(A\cdot A^{-1}) = \det(A)\cdot\det(A^{-1})$$

$$\det(-A) = \det(-1\cdot A) = (-1)^4\cdot\det(A) = a$$

$$\det(3A) = 3^4\det(A) = 3^4\cdot a$$

$$\det(AA^t) = \det(A)\cdot\det(A^t) = (\det(A))^2 = a^2$$

תרגיל 7 סעיף א

$$\det(A\cdot(A^t)^{-1}) = \det(A)\cdot\det((A^t)^{-1}) = \det A\cdot\frac{1}{\det(A^t)} = \frac{a}{a} = 1$$

ב) $\det(B^{-1}ABA) = \det(B^{-1})\cdot\det(A)\cdot\det(B)\cdot\det(A) = a^2$

שאר התשובות מתבצעות באותו אופן.
מה שמפריע להבין בשאלה זו זה שכפל בין מטריצות הוא <u>לא</u> חילופי ולכן

$$B^{-1}\cdot A\cdot B\cdot A \neq B^{-1}\cdot B\cdot A\cdot A = A^2$$

כלומר לא ניתן לטעון שוויון לגבי A,B. אך דטרמיננטה של מטריצה זה <u>מספר</u> בשדה ובשדה הכפל <u>כן</u> חילופי ולכן התשובה בסוף יוצאה a^2.

<u>שאלה 7</u>

א) הוכחה ש- $\det(A)=\det(A^t)$ נוכיח מכך שאנו רשאים לפתח את הדטרמיננטה לפי שורה או עמודה לבחירתנו. את ההוכחה עצמה נעשה באינדוקציה על גודל המטריצה.

מקרה בסיס: $n=1$ וה"מטריצה" שלנו היא רק מספר אחד. לכל $a\in\mathbb{F}$ $a=a^t$ ולכן $\det(a)=\det(a^t)$.
כעת נניח שהטענה נכונה עבור מטריצות מגודל $(n-1)\times(n-1)$ ונוכיח את נכונותה עבור מטריצות בגודל $n\times n$.
נפתח את הדטרמיננטה של A לפי השורה הראשונה

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1,j}\det(M_{1,j})$$

נסמן $B=A^t$ ונחשב את הדטרמיננטה של B לפי <u>העמודה</u> הראשונה

$$\det(B)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i,1}\det(M_{i,1})$$

נשים לב $a_{1,j}=b_{i,1}$ עבור $1\le i=j\le n$ ועוד נשים לב ~~[illegible]~~ שהמטריצה המתקבלת מ-A ע"י מחיקת השורה הראשונה והעמודה ה-j-ית היא בדיוק המשוחלפת (transposed) של זו המתקבלת מ-B ע"י מחיקת העמודה הראשונה והשורה ה-i-ית עבור $1\le i=j\le n$

כמו-כן כל אחת מה מטריצות הללו היא בגודל $(n-1)\times(n-1)$ ולכן ניתן להפעיל עליהן את הנחת האינדוקציה ולהיווכח שהדטרמיננטות שלהן שוות.

ולכן $$\det(A) = \det(A^t)$$

$$\det(AA^t) = \det(A)\cdot\det(A^t) = (\det A)^2 \geq 0$$

נשים לב ש- $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ולכן $\det(A)$ מספר ממשי!

ב) $$\det(A) = \det(-A^t) = (-1)^n \det(A^t) = -\det(A)$$

נתון n אי-זוגי

$$\Longrightarrow \det(A) = 0$$

ג) $$1 = \det(I_{n\times n}) = \det(A\cdot A^t) = (\det(A))^2$$

$$\Longrightarrow \det(A) = \pm 1$$

<u>שאלה 8</u>

את השאלה הזו פותרים בעזרת הנוסחה

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\cdot \operatorname{adj}(A)$$

א) נזכיר את ההגדרה:

$$(\operatorname{adj}(A))_{i,j} = (-1)^{i+j}\cdot \det(M_{j,i})$$

מכיוון שב- A כל האיברים הם מספרים שלמים אז בפרט ב- $M_{j,i}$ כל האיברים שלמים ובחישוב הדטרמיננטה הפעולות המתבצעות הן רק כפל וחיבור/חיסור. לכן גם $\det(M_{j,i})$ מספר שלם לכל $1 \leq i,j \leq n$.
$\det(A) = \pm 1$ ולכן גם ב- A^{-1} כל האיברים שלמים.

ב) אותם הסברים בכיוון ההפוך.

שאלה 9

א) הטענה נכונה. הוכחה:

A ~~הפיכה~~ הפיכה $\Leftrightarrow$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, adj(A) \Leftrightarrow \det(A^{-1}) = \det\left(\frac{1}{\det(A)}\cdot adj(A)\right)$$

$$\Leftrightarrow \det(A^{-1})\cdot(\det(A))^{n} = \det(adj(A))$$

$$\Leftrightarrow \det(adj(A)) \neq 0 \Leftrightarrow adj\,A$$ הפיכה

בכיוון ההפוך נימוקים דומים יעבדו.
(לא למעשה הוכחה דו-כיוונית כי בזמן הכל אין שקילויות - סימנתי באדום)

ב) הטענה לא נכונה. לדוגמה נקח $A = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \neq I_{3\times3}$

$$adj(A) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = I_{3\times3}$$

ג) הטענה לא נכונה. לדוגמה נקח $A = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \neq 0_{3\times3}$

אך $adj(A) = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = 0_{3\times3}$

ד) הטענה נכונה. הוכחה

$$(adj(\lambda A))_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(\lambda\cdot M_{j,i}) \underset{\uparrow}{=} (-1)^{i+j}\lambda^{n-1}\det(M_{j,i})$$

(נזכור שהמינור הוא מטריצה מגודל $(n-1)\times(n-1)$)

$$= \lambda^{n-1}(adj(A))_{i,j}$$

וזה לכל $1 \le i,j \le n$.

ה) הטענה לא נכונה. לחשוב לבד על דוגמה נגדית.
רמז: תצטרכו למצוא שתי מטריצות הפיכות שמקיימות $A^{-1}B^{-1} \neq B^{-1}A^{-1}$ ולהסביר למה זה מפריך.

ו) הטענה נכונה. הוכחה: יש להיעזר בסעיף ד'...

<u>שאלה 10</u>

א) הטענה לא נכונה. נקח למשל $A=B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$\det(A+B)=\det\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=4$$

$$\det(A)+\det(B)=1+1=2$$

ב) הטענה נכונה וכבר הוכחנו אותה מוקדם יותר בדף זה.

<u>שאלה 11</u>

נקח למשל $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ אז

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

וגם $2\cdot B\cdot A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

נניח בשלילה ש- A,B הפיכות וגם $AB=2BA$

$$1=\det(I_{2\times2})=\det(A^{-1}ABB^{-1})=\det A^{-1}\cdot 2AB\cdot B^{-1}$$

$$=2^4\cancel{\det(A^{-1})}\cancel{\det(A)}\cdot\cancel{\det(B)}\cdot\cancel{\det(B^{-1})}=4$$

וזו כמובן סתירה.