Homework 7

1. i. No. ii. Yes. iii. Yes. iv. Yes. v. Yes. vi. No (The two vector spaces aren't above the same field).
2. ii. $Ker(T) = \{A \in M_{n\times k}(F) : \ row(A) \subseteq Null(B^t)\}$ iii. $Ker(T) = \{0\}$.

   iv. $ker(T) = \{p(x) : \ p(1) = 0\} = \{\sum_{i=0}^{m} a_i x^i \in F[x] \ : \ \sum_{i=0}^{m} a_i = 0\} = span\{x^i - x^{i+1}\}_{i=0}^{\infty}$

   v. $ker(T) = span\{1\}$. If the field has a positive character p (מציין חיובי) then $ker(T) = span\{x^{pk}\}_{k=0}^{\infty}$.
3. Proof
4. i. No. ii. Yes. iii. No. iv. Yes.
5. a. i. $ker(T) = Span\{1\}; \ Im(T) = Span\{x^2, x\}$.

   ii. $Ker(T) = \{0\}; \ Im(T) = Span\{1, x, x^2\}$

   iii. $Ker(T) = \{0\}; \ Im(T) = Span\{1, x, x^2\}$

   b.

   i. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   ii. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   iii. $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   c.

   i. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

   ii. $\begin{pmatrix} -2 & 6 & 6 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

   iii. $\begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
6. a. $Ker(T) = \{0\}; \ Im(T) =$ span $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

   b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. i. Yes. ii. Yes.
8. $dim(Im(T)) = 2$. From the Dimension Theorem $Ker(T) = 2$.
   $Ker(T) = Span\{(0,0,0,1),(1,0,0,0)\};\ Im(T) = R^2 = span\{(1,0),(0,1)\}$.
9. $Ker(T) = Span\{v_1 - v_2, v_2 - v_3\};\ Im(T) = Span\{u\}$.
10. i. No. For example $T,S : R^2 \to R^2;\ T(v) = v;\ S(v) =- v$.
    ii. Yes. For example $T(a,b,c,d) = (3d,\ a+b-c+d,\ 2a+2b-2c+2d)$.
    iii. No (derived from the Dimension Theorem).

11. נוכיח:

א. **אם** $dim(V_1) - dim(W_1) \le dim(V_2)$ **:** נסמן, $dim(W_1) = k,\ dim(V_1) = n$. נקח בסיס ל-$W_1$ שנסמנו $B_{W_1} = (w_1, ..., w_k)$, ונרחיב אותו לבסיס לכל V_1 שנסמנו $B_{V_1} = (w_1, ..., w_k, v_{k+1}, ..., v_n)$. מכיוון ש-$n - k = dim(V_1) - dim(W_1) \le dim(V_2)$ **,** קיימים n-k וקטורים בת"ל ב-V_2, שנסמנם $(u_{k+1}, ..., u_n)$. ממשפט שראיתם בכיתה, לכל n וקטורים $(r_1, ..., r_n)$ שנבחר ב-V_2 קיימת טרנספורמציה לינארית יחידה ששולחת כל וקטור בבסיס B_{V_1} לוקטור באינדקס המתאים מ-$(r_1, ..., r_n)$. לכן נוכל להגדיר טרנספורמציה לינארית $T : V_1 \to V_2$ ע"י הגדרתה על הבסיס B_{V_1} באופן הבא:

- $T(w_i) = 0 \quad \forall 1 \le i \le k$
- $T(v_i) = u_i \quad \forall k+1 \le i \le n$

ברור כי $W_1 \subseteq ker(T)$, ולכן $dim(ker(T)) \ge k$. יתר על כן, $dim(Im(T)) \ge n - k$, מכיוון ש-$u_{k+1}, ..., u_n \in Im(T)$. ממשפט המימדים אנו יודעים ש-$n = (n-k) + k = dim(ker(T)) + dim(Im(T))$, לכן $dim(ker(T)) = k$ (ו-$dim(Im(T)) \ge n - k$, אבל זה אינו נחוץ). מכיוון שגם $dim(W_1) = k$ ו-$W_1 \subseteq ker(T)$, אז $W_1 = ker(T)$.

מאידך, **אם קיימת טרנספורמציה לינארית** $T : V_1 \to V_2$, **כך ש-** $ker(T) = W_1$:

- נבחין ש-$Im(T) \subseteq V_2$, ולכן בפרט $dim(Im(T)) \le dim(V_2)$.
- כמו כן, ממשפט המימדים נסיק ש-$dim(Im(T)) = dim(V_1) - dim(Ker(T))$.

משני הפרטים הנ"ל נקבל ש-$dim(V_1) - dim(W_1) \le dim(V_2)$ כנדרש.

ב. **אם** $dim(V_2) \le dim(V_1)$, אז נסמן $dim(V_2) = m$, ו-$dim(V_1) = m + k$ (עבור $m, k \ge 0$ כלשהם). נקח בסיסים $B_{V_2} = (u_1, ..., u_m)$, ו-$B_{V_1} = (v_1, ..., v_m, ..., v_{m+k})$ ל-V_2 ו-V_1 בהתאמה. לכל n וקטורים $(r_1, ..., r_n)$ שנבחר ב-V_2 קיימת טרנספורמציה לינארית יחידה ששולחת כל וקטור בבסיס B_{V_1} לוקטור באינדקס המתאים מ-$(r_1, ..., r_n)$. לכן נוכל להגדיר טרנספורמציה לינארית $T : V_1 \to V_2$ ע"י הגדרתה על הבסיס B_{V_1} באופן הבא:

- $T(v_i) = u_i \quad \forall 1 \le i \le m$
- $T(v_i) = 0 \quad \forall m+1 \le i \le m+k$

נראה שהתמונה של T היא כל המרחב: ברור כי $B_{V_2} \subseteq Im(T)$, ולכן $V_2 = Span(B_{V_2}) \subseteq Im(T)$. מכיוון שגם $Im(T) \subseteq V_2$, אז מתקיים השיוויון $Im(T) = V_2$ כנדרש.

מאידך, **אם קיימת טרנספורמציה לינארית** $T : V_1 \to V_2$, **כך ש-** $Im(T) = V_2$:

- אז ממשפט המימדים $dim(V_1) = dim(ker(T)) + dim(Im(T))$, ומכיוון שמימד של מרחב הוא אי-שלילי, אז $dim(ker(T)) \ge 0$, ולכן $dim(V_1) = dim(ker(T)) + dim(Im(T)) \ge dim(Im(T))$.

- $Im(T) = V_2$ לכן $dim(Im(T)) = dim(V_2)$

משני הפרטים הנ"ל נקבל ש-$dim(V_1) \geq dim(V_2)$ כנדרש.

ג. **נניח כי** $dim(V_1) = dim(W_1) + dim(W_2)$, אז נסמן $dim(W_1) = n;\ dim(W_2) = k;\ dim(V_1) = n + k$.
נבחר בסיס $B_{W_1} = (w_1, ..., w_n),\ B_{W_2} = (u_1, ..., u_k)$ ל-W_1,W_2 בהתאמה, וכן נרחיב את B_{W1} לבסיס עבור V_1 ע"י $B_{V_1} = (w_1, ..., w_n, v_{n+1}, ..., v_{n+k})$. נגדיר $T : V_1 \to V_2$, ע"י הגדרת פעולתה ע"י הבסיס (ובדומה לסעיפים הקודמים, ממשפט שראיתם בכיתה, T מוגדרת היטב):

- $T(w_i) = 0\ \forall 1 \leq i \leq n$
- $T(v_{n+i}) = u_i\ \forall 1 \leq i \leq k$

נראה ש-T מקיימת את הנדרש, כלומר $ker(T) = W_1,\ Im(T) = W_2$**:** נבחין כי $w_1, ..., w_n \in ker(T)$, כלומר $W_1 \subseteq ker(T)$ ולכן $dim(ker(T)) \geq n$, ובנוסף, $u_1, ..., u_k \in Im(T)$, כלומר $W_2 \subseteq Im(T)$, ולכן $Im(T) \geq k$. מכיוון ש-$dim(V) = n + k = dim(ker(T)) + dim(Im(T))$, אז מתקיימים **שיוויונים** $dim(ker(T)) = n$, ו-$dim(Im(T)) = k$

מכיוון ש-$W_1 \subseteq ker(T)$, ו-$dim(W_1) = dim(ker(T)) = k$, **אז** $W_1 = ker(T)$. ובאותו אופן, $W_2 \subseteq Im(T)$, ו-$dim(W_2) = dim(Im(T)) = n$, **לכן** $W_2 = Im(T)$.

מאידך, **אם קיימת טרנספורמציה לינארית** $T : V_1 \to V_2$, **כך ש-** $Im(T) = W_2,\ ker(T) = W_1$:

- $Im(T) = W_2$ לכן $dim(Im(T)) = dim(W_2)$, וכן $ker(T) = W_1$ לכן $dim(ker(T)) = dim(W_1)$.

ממשפט המימדים $dim(V_1) = dim(Im(T)) + dim(ker(T)) = dim(W_1) + dim(W_2)$ כנדרש.

12. א. נניח כי $W \subseteq V_1$ תת-מרחב וקטורי של V_1, ונראה כי $f(W) \subseteq V_2$ תת-מרחב וקטורי של V_2:

- **נראה כי וקטור ה-0 ב-**$f(W)$**:** W תמ"ו של V_1 לכן וקטור ה-0 של V_1 שייך ל-W. מכיוון ש-$f(0) = 0 \in V_2$ לכל טרנספורמציה לינארית, אז $0 \in f(W)$.
- **נראה כי** $f(W)$ **סגור לחיבור:** אם $u, w \in f(W)$, אז קיימים $v_u, v_w \in W$, כך ש-$f(v_u) = u,\ f(v_w) = w$. מסגירות לחיבור של W מתקיים ש-$v_u + v_w \in W$. ונבחין ש-$f(v_u + v_w) = f(v_u) + f(v_w) = u + w$ מתכונת החיבור של טרנספורמציה לינארית. מצאנו וקטור ב-W שנשלח ל-u+w, לכן $u + w \in f(W)$, כלומר $f(W)$ סגור לחיבור.
- **נראה כי** $f(W)$ **סגור לכפל בסקלר מהשדה:** יהי $u \in f(W)$, ו-α סקלר מהשדה. מהגדרה, קיים וקטור $v_u \in W$ כך ש-$f(v_u) = u$. מכיוון ש-W סגור לכפל בסקלר, אז $\alpha v_u \in W$, ומתכונות הכפל בסקלר של טרנספורמציה לינארית, $f(\alpha v_u) = \alpha f(v_u) = \alpha u$. מצאנו אם כן, וקטור ב-W שנשלח ע"י f ל-αu ולכן $\alpha u \in f(W)$, כלומר $f(W)$ סגור לכפל בסקלר.

ממשפט שהוכחתם בשיעור, אם הקבוצה $f(W) \subseteq V_2$ מכילה את וקטור ה-0 וסגורה לחיבור ולכפל בסקלר, אז הקבוצה היא תת מרחב של V_2.

ב. נסמן את המימד של W ב-k. נבחר בסיס $B_W = (w_1, ..., w_k)$ ל-W, ונראה ש-$\{f(w_1), ..., f(w_k)\}$ קבוצה פורשת ל-$f(W)$ (ולכן גודל של בסיס ל-$f(W)$ יהיה לכל היותר k). ואכן, עבור כל $u \in f(W)$, קיים $w \in W$ כך ש-$f(w) = u$. ניתן לכתוב את w כצירוף לינארי של איברי הבסיס, כלומר קיימים סקלרים

מהשדה $\alpha_1,...,\alpha_k$, כך ש- $w=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j w_j$. נפעיל את f על שני הצדדים ונקבל $u=f(w)=f(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j w_j)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j f(w_j)$. לכן u נפרשת ע"י $\{f(w_1),...,f(w_k)\}$ כנדרש.

ג. אם f הפיכה, אז היא חד-חד ערכית, ולכן הצמצום שלה $f|_W : W \to V_2$ הוא בפרט גם העתקה לינארית חד-חד ערכית. כמו כן $Im(f|_W)=f(W)$, ולכן זוהי העתקה חד-חד ערכית מ-W ל- $f(W)$ כנדרש.