1) א. i. כן $T(x,y,z)=(x,0,z)$

ii. כן $T(x,y,z)=-(x,y,z)$

iii. $T(x,y,z)=(x,-y,z)$

ג. i. נסמן $\alpha=\tan\phi$. כלומר שיקוף ביחס לישר $\mathrm{Span}\{(1,\alpha)\}$

אם $\alpha=0$ אז

$$[T]_E^E=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

אחרת:

$$[T]_E^E=\begin{pmatrix}1-\alpha^2&2\alpha\\2\alpha&\alpha^2-1\end{pmatrix}$$

שימו לב- המקרה א' כלול בכללי.

ii.

$$[T_{\phi x}]_E^E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\phi&-\sin\phi\\0&\sin\phi&\cos\phi\end{pmatrix}$$

iii.

$$[T_{\phi y}]_E^E=\begin{pmatrix}\cos\phi&0&\sin\phi\\0&1&0\\-\sin\phi&0&\cos\phi\end{pmatrix}$$

$$[T_{\phi z}]_E^E=\begin{pmatrix}\cos\phi&-\sin\phi&0\\\sin\phi&\cos\phi&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

vi. מכפלה בשורשים המתאימים בהתאמה.

v.

$$S(x,y,z)=\begin{pmatrix}\lambda_x&0&0\\0&\lambda_y&0\\0&0&\lambda_z\end{pmatrix}$$

ב. לא

2. I. ג - כן

ד. כן

ה. כן

ו. כן

3. ב. הערכים של באלכסון.

1. i. נכון. זה נובע מכך ש- $P_A(\lambda)=P_{A^t}(\lambda)$.

ii. לא נכון. דוגמה:

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

לכן $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ ו"ע של A.

לעומת זאת

$$A^t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}}_{A^t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

לא וקטור עצמי של A^t.

iii. לא נכון.

דוגמה:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}\quad \lambda_1^A=3+\sqrt{10},\ \lambda_2^A=3-\sqrt{10}$$

$$B=\begin{pmatrix}3&0\\0&4\end{pmatrix}\quad \lambda_1^B=3,\ \lambda_2^B=4$$

$$AB=\begin{pmatrix}3&8\\9&20\end{pmatrix}\quad \lambda_1^{AB}=\frac{23+\sqrt{577}}{2},\ \lambda_2^{AB}=\frac{23-\sqrt{577}}{2}$$

והע"ע של המכפלה אינם מיגור, ככל לא תמיד מכפלת ע"ע של A,B.

ח. נניח בשלילה כי $v_1,\dots,v_n$ תלויים לינארית,
כלומר קיים צ"ל לא טריוויאלי שנותן 0.

$1\le j\le k$, $\alpha_{i_j}\neq 0 \rightarrow$ נסמן $\alpha_{i_1}v_{i_1}+\dots+\alpha_{i_k}v_{i_k}$ צירוף לינארי שנותן 0 מאורך מינימלי. כלומר, כל צירוף מאורך $<k$ שנותן 0 הוא הצירוף הטריוויאלי.

$$\alpha_{i_1}v_{i_1}+\dots+\alpha_{i_k}v_{i_k}=0$$

נכפול ב-λ_{i_1} $\Leftarrow$

$$(*)\quad \alpha_{i_1}\lambda_{i_1}v_{i_1}+\dots+\alpha_{i_k}\lambda_{i_1}v_{i_k}=0=\lambda_{i_1}\cdot 0$$

כמו כן, נוכל לפעול את הצד המקורי ב-A:

$$A(\alpha_{i_1}v_{i_1}+\dots+\alpha_{i_k}v_{i_k})=A0=0$$

$$\alpha_{i_1}Av_{i_1}+\dots+\alpha_{i_k}Av_{i_k})=0$$

$$(**)\quad \alpha_{i_1}\lambda_{i_1}v_{i_1}+\dots+\alpha_{i_k}\lambda_{i_k}v_{i_k}=0$$

נחסר את $(*)$ מ-$(**)$:

$$\alpha_{i_1}\overset{=0}{(\lambda_{i_1}-\lambda_{i_1})}v_{i_1}+\alpha_{i_2}\underset{\neq 0}{(\lambda_{i_2}-\lambda_{i_1})}v_{i_2}+\dots+\alpha_{i_k}(\lambda_{i_k}-\lambda_{i_1})v_{i_k}=0-0=0$$

נבחין שהמקדם של v_{i_1} הוא 0, אך המקדם של v_{i_2} אינו 0, כלומר קיבלנו צירוף לינארי לא טריוויאלי באורך קטן מ-k, שנותן 0. בסתירה לכך ש-k הוא המינימלי.

4. א. אם $A^2=0$ אז הע"ע היחיד של A הוא 0 (ואכן -
$A^2v=AAv=\lambda^2 v$ ואם $0\neq\lambda$ אז $\lambda^2 v\neq 0$ בסתירה לכך ש-$A^2v=0$).
~~[illegible]~~ מכיוון ש-$A\neq 0$ אז מימד המרחב העצמי של 0 הוא
1. יתר על כן אם $Av\neq 0$ אז Av שייך למרחב העצמי.
של 0. נקח v כך ש-$Av\neq 0$ ונגדיר $B=(v, Av)$
נראה ש- v, Av בת"ל (כי $v\notin Span\{Av\}$, כי קבענו ש-v אינו במרחב
העצמי של A), כלומר הם בסיס. נראה שהמטריצה ~~[illegible]~~
המייצגת בבסיס זה היא $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ ולכן הן דומות.

ב. לא נכון. דוגמא: $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5. א. i. x^2+a^2

ii. x^3-ax^2-bx-c

* iii. $x^3-12x^2+44x-48=(x-2)(x-4)(x-6)$

ב. נזכור שהמקדם החופשי הוא $\det(A)$ בערך מוחלט של
מטריצה. אבל אנטי-סימטריות מסדר אי-זוגי הן 0 (כי:

$$\det(A)=\det(A^t)=\det(-A)=(-1)^n\det(A)\underset{\text{n אי-זוגי}}{=}-\det(A)$$

$$\det(A)=-\det(A)$$

$$\det(A)=0.$$

לכן המקדם החופשי הוא 0.

ג. מכפלת הע"ע היא $\det(A)$: $\det(A)=x z d$

סכום הע"ע הוא $trace(A)$ $trace(A)=x+z+d$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ע"ע: $\lambda=1$

ו"ע: $\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

לא לכסינה.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ע"ע: $\lambda=3,1$

ו"ע: עבור $\lambda=1$ $\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

עבור $\lambda=3$ $\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

המטריצה לכסינה.

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad U=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אלכסונית. מלכסנת

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ע"ע: $\lambda=6,2$

ו"ע: עבור $\lambda=2$ $\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

עבור $\lambda=6$ $\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$

המטריצה לכסינה:

$$D=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad U=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ע"ע: $\lambda=\pm i$

ו"ע: $\lambda=i$ $\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\right\}$

$\lambda=-i$ $\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}\right\}$

המטריצה לכסינה.

$$D=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad U=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

ג. מעל $\mathbb{R}$ אין ע"ע (הפולינום האופייני לא מתפרק לגורמים לינארים $p(\lambda)=\lambda^2+1$). לא לכסינה. $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

מעל $\mathbb{Z}_2$ הפולינום האופייני אינו מתפרק לגורמים לינארים ($p(\lambda)=\lambda^2+\lambda+1$), ולכן אין ע"ע והמטריצה לא לכסינה. $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$

$\alpha\in\mathbb{R}$ ובה"כ $\alpha\in[0,2\pi)$ $\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$

הפולינום האופייני הוא $p(\lambda)=\lambda^2-(2\cos\alpha)\lambda+1$

אם $\cos\alpha=\pm1$ אז צורתה $\begin{pmatrix}\pm1&0\\0&\pm1\end{pmatrix}$ והפתרון נכון.

אחרת ($\cos\alpha\neq1$) הדיסקרימיננטה של הפולינום היא

$$D=4\cos^2\alpha-4$$

ומכיוון ש $1>\cos^2\alpha\geq0$ (כי $\cos\alpha\neq\pm1$) אז $D<0$

ולכן אין לפולינום שורשים. כלומר הפולינום אי-פריק ואין ע"ע מעל $\mathbb{R}$.

לסיכום: $k\in\mathbb{Z}$

$\alpha=0+\pi k \Rightarrow \lambda=\pm1$ והמרחב העצמי הוא כל $\mathbb{R}^2$

(לכן המטריצה אלכסונית).

$\alpha\neq0+\pi k \Rightarrow$ אין ע"ע והמטריצה לא לכסינה.