מבוא לטופולוגיה, מבחן סופי (מועד ב).
אוניברסיטת בן גוריון

מספר הקורס: 201.1.0091 מרצה: ד.קרנר תאריך: 29.07.2016 משך הבחינה: 3 שעות ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 105 נקודות) אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבונים	כללים: אסור לכתוב בצבע אדום. הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך). בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?" , "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".

בכל השאלות: תשובה "כן" דורשת הוכחה/בניה מפורשת, תשובה "לא"- הסבר מפורש/דוגמא נגדית

(1) (א) (10) עבור פונקציה רציפה $X \stackrel{f}{\to} Y$ וגרף שלה, $\Gamma_f \subset X \times Y$, הוכיחו: $X \approx \Gamma_f$ (הומאומורפיזם).

(ב) (15) נתונים מרחבים טופולוגיים קשירים $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$, ופונקציה $X \stackrel{f}{\to} Y$ עם גרף Γ_f קשיר. האם f בהכרח רציפה?

(2) (א) (10) בהינתן מרחב טופולוגי קשיר, $(X, \mathcal{T}_X)$, ותת-קבוצה $\varnothing \neq A \subsetneq X$, נגדיר פונקציה

$$X \stackrel{f_A}{\to} \mathbb{R}, \quad f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

האם f_A רציפה? אם לא, תארו בצורה מפורשת את קבוצת הנקודות של אי-רציפות של f_A.

(ב) (15) בהינתן מרחב מטרי (X, d), נניח שעבור כל $x \in X$ קיים $\epsilon > 0$ כך שהסגור $\overline{Ball_\epsilon(x)} \subset X$ הנו מרחב קומפקטי. האם (X, d) בהכרח מרחב שלם?

(3) (א) (15) יהי (X, d) מרחב קומפקטי עם העתקה $X \stackrel{f}{\to} X$ המקיימת $d(x, y) > d\big(f(x), f(y)\big)$, עבור $x \neq y$. הוכיחו כי למשוואה $f(x) = x$ קיים פתרון ב X.

(ב) (10) תהי $\gamma \subset S^2$ לולאה אשר לא מכסה את S^2 כולה. תבנו הומוטופיה מפורשת שמכווצת את הלולאה.

(4) (א) (20) נתבונן במרחב $\big(\prod_{\alpha \in A} \mathbb{R}, \mathcal{T}^{box}_{\prod_{\alpha \in A} \mathbb{R}}\big)$. הוכיחו שהעתקה $[0,1] \stackrel{\{\gamma_\alpha\}}{\to} \prod_{\alpha \in A} \mathbb{R}$ הנה רציפה אמ"ם $\{\gamma_\alpha\}$ הן פונקציות רציפות אשר קבועות מקומית פרט למספר סופי של ערכים של α. (כלומר: עבור כל $t_0 \in [0,1]$ קיימת סביבה פתוחה $t_0 \in \mathcal{U} \subseteq [0,1]$ ותת קבוצה סופית $\tilde{A} \subseteq A$ כך ש $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha \notin \tilde{A}}$ קבועות על $\mathcal{U}$.)

(ב) (10) עבור A קבוצה אינסופית הוכיחו שמרחב $\big(\prod_{\alpha \in A} \mathbb{R}, \mathcal{T}^{box}_{\prod_{\alpha \in A} \mathbb{R}}\big)$ הנו לא קשיר מסילתית מקומית באף נקודה. (כלומר הוא לא מכיל אף קבוצה פתוחה ,לא ריקה, אשר קשירה מסילתית.)

בהצלחה!