

# מבנים אלגבריים. בוחן אמצע הראשון.

## אוניברסיטת בן גוריון

מספר הקורס: 201.1.7031	כללים: אסור לכתוב בצבע אדום.
מרצה: ד.קרנר	הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים.
מתרגל: מ.פורת	הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק, לא ארוך, ורשום בכתב יד קריא. בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?", "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".
תאריך: 1.12.2017	
משך המבחן: 3 שעות	
ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 100 נקודות)	
הבחינה מותרת לפרסום	
אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבוני	

יש לנמק היטב את כל התשובות.

(1) (15 נקודות) יהיו  $m, n \in \mathbb{N}$ . נסחו והוכיחו את התנאי הכרחי ומספיק שיבטיח איזומורפיזם של חבורות:

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

(2) הוכיחו/הפריכו (ע"י דוגמא נגדית)

- (א) (15 נקודות) יהי  $G \xrightarrow{\phi} H$  הומומורפיזם של חבורות. אז  $N \triangleleft G$  אם ורק אם  $\phi(N) \triangleleft \phi(G)$ .
- (ב) (15 נקודות) תהי  $G$  חבורה אשר גודלה מתחלק במספר ראשוני  $p$ . אז קיימת  $N \triangleleft G$ ,  $|N| = p$ .

(3) נקבע  $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in Mat_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  ונגדיר  $O(1, 1) := \{A \in Mat_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid AEA^t = E\}$

- (א) (10 נקודות) הוכיחו:  $O(1, 1) < GL(2, \mathbb{R})$ . האם זאת תת-חבורה נורמאלית? (סימון:  $GL(2, \mathbb{R}) = GL_2(\mathbb{R})$ )
- (ב) (10 נקודות) נגדיר  $SO(1, 1) := O(1, 1) \cap SL(2, \mathbb{R})$ . מצאו את המנרמל של  $SO(1, 1)$  בתוך  $O(1, 1)$ .
- (ג) (10 נקודות) זהו את חבורת המנה  $O(1, 1)/SO(1, 1)$ .

(4) (25 נקודות) נקבע חבורות  $N_1, N_2 \triangleleft G$  המקיימות:  $\gcd(n_1, n_2) = 1, |N_2| = n_2, |N_1| = n_1$ . (עבור כל ערך תנו דוגמא מפורשת, והוכיחו שאין ערכים אחרים) מהם הערכים האפשריים של המספר  $|\langle N_1, N_2 \rangle|$ ?

בהצלחה!