

מבנים אלגבריים. בוחן אמצע השני.

אוניברסיטת בן גוריון

מספר הקורס: 201.1.7031	כללים: אסור לכתוב בצבע אדום.
מרצה: ד.קרנר	הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל גדודי הביניים. השתמשו בטייטה לכל הנסיונות ההתחלתיים.
מתרגל: מ.פורת	הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק, לא ארוך, ורשום בכתב יד קריא. בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?", "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".
תאריך: 5.01.2018	
משך המבחן: 3 שעות	
ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 100 נקודות)	
	הבחינה מותרת לפרסום. אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבוני.

יש לנמק היטב את כל התשובות.

- (1) יהי $C^0(-1, 1)$ חוג של כל הפונקציות הרציפות בקטע $(-1, 1)$. נגדיר אידאל $I \subset C^0(-1, 1)$ ע"י $I = \{f(x) \mid f(0) = 0\}$
- (א) (5 נקודות) האם I אידאל ראשוני?
- (ב) (5 נקודות) האם I אידאל מקסימלי?
- (ג) (5 נקודות) האם I אידאל ראשי?

- (2) (20 נקודות) מיינו את כל החבורות האבליות מסדר 36, עד כדי איזומורפיזם.

- (3) (20 נקודות) יהי R חוג קומוטטיבי עם יחידה. יהי $I \subsetneq R$ אידאל מקסימלי. הוכיחו ש- I מכיל את כל הנילפוטנטים של R .
($a \in R$ נקרא נילפוטנטי אם $a^n = 0$ עבור $n \in \mathbb{N}$ מסוים.)

- (4) יהי $G \xrightarrow{\phi} H$ הומומורפיזם על של חבורות סופיות.
- (א) (5 נקודות) הוכיחו: אם $K < G$ תת-חבורה מסדר p (ראשוני) ו $\phi(K) \neq \{e\}$, אז גם $\phi(K)$ תת-חבורה מסדר p .
- (ב) (20 נקודות) הוכיחו ש- ϕ משרה העתקה $Syl_p(G) \rightarrow Syl_p(H)$. כלומר, אם $K \in Syl_p(G)$ אז $\phi(K) \in Syl_p(H)$.

- (5) נקרא לאיזומורפיזם של חוג לעצמו, $R \xrightarrow{\phi} R$, אוטומורפיזם של R . נסמן ע"י $Aut(R)$ את חבורת האוטומורפיזמים של R .
- (א) (5 נקודות) הוכיחו/הפריכו (ע"י דוגמא נגדית): אם $\phi \in Aut(R)$ אז $\phi(R^\times) = R^\times$.
- (ב) (5 נקודות) חשבו/זהו את $Aut(\mathbb{Q})$.
- (ג) (10 נקודות) חשבו/זהו את $Aut(\mathbb{Q}[x]/(x^2))$.