

מבנים אלגבריים, מועד א.

אוניברסיטת בן גוריון

<p>כללים: אסור לכתוב בצבע אדום. הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטייפ לכל הנסיונות ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק, לא ארוך, ורשום בכתב יד קריא. בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?", "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".</p>	<p>מספר הקורס: 201.1.7031 מרצה: ד.קרנר מתרגל: מ.פורת תאריך: 08.02.2018 משך המבחן: 3 שעות ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 100 נקודות) הבחינה מותרת לפרסום אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבוניים</p>
--	---

יש לנמק היטב את כל התשובות.

- (1) (20 נקודות)
- (א) יהי \mathbb{k} שדה. האם $SL(n, \mathbb{k})$ הינה תת-חבורה נורמאלית ב $GL(n, \mathbb{k})$? אם כן, זהו את החבורה $GL(n, \mathbb{k})/SL(n, \mathbb{k})$.
- (ב) תהי G חבורה ו- $Z(G)$ המרכז שלה. נניח ש- $G/Z(G)$ הינה אבלית. האם בהכרח מתקיים $G/Z(G) = \{e\}$?
- (ג) תהיינה G, H חבורות, כך ש- H אבלית, ויהיו $G \xrightarrow{\phi} H$ ו $H \xrightarrow{\psi} G$ הומומורפיזמים. האם בהכרח מתקיים $[G, G] \subseteq \ker(\phi)$? האם בהכרח מתקיים $Im(\psi) \trianglelefteq G$?

- (2) (20 נקודות) הוכיחו שכל חבורה מסדר 51 הינה ציקלית.

- (3) (30 נקודות)
- (א) חשבו את $\gcd(5 + 7i, 7 + 5i)$ בחוג $R = \mathbb{Z}[i]$.
- (ב) יהי חוג קומוטטיבי עם יחידה. הוכיחו/הפריכו: $I \subsetneq R$ הינו אידיאל ראשוני אם"ם R/I הינו תחום שלמות.
- (ג) נגדיר $R = \mathbb{k}[x, y]$ אידיאל הנוצר ע"י $x^4, x^4 - yx^8, y^2x^6 - yx^8, y^4 - y^3x^5 + y^2x^6 - yx^8$. מיינו את כל האידיאלים הראשוניים ב- R המכילים את I .

- (4) (30 נקודות)
- (א) יהי $R = \mathbb{k}[x, y]$ ונגדיר מודול $M = R/(y^3 - x^4)$. חשבו/זהו את R מודולים $Hom(M, R)$ ו $Tor(M)$.
- (ב) יהי $R = \mathbb{k}[x]$, נקבע מטריצה $A \in Mat_{m \times n}(R)$, ונתבונן במערכת משוואות
- $$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$
- הוכיחו: קבוצת הפתרונות של המערכת הינה תת-מודול חופשי של $R^{\oplus n}$.

בהצלחה!