מבנים אלגבריים, מועד ב.

אוניברסיטת בן גוריון

מספר הקורס: 201.1.7031
מרצה: ד.קרנר
מתרגל: מ.פורת
תאריך: 04.03.2018
משך המבחן: 3 שעות
ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 100 נקודות)
הבחינה מותרת לפרסום
אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבונים

<u>כללים</u>: אסור לכתוב בצבע אדום.
הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק, לא ארוך, ורשום בכתב יד קריא. בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?" , "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".

<u>יש לנמק היטב את כל התשובות.</u>

(1) (10 נקודות) האם חוג $\mathbb{Q}[x]/(3x^2+5x+1)$ הינו שדה?

(2) (א) (12 נקודות) האם $\mathbb{Z}[1+\sqrt{-7}]$ הינו תחום אוקלידי?
(ב) (13 נקודות) יהי $R=\mathbb{Z}[i]$, ונגדיר אידאל $I=(4)$. מצאו מערכת יוצרים מינימלית עבור $\sqrt{I}$.
(תזכורת: $\sqrt{I}:=\{a\in R|\ a^n\in I,\ for\ n\gg 1\}$)

(3) יהי $g\in G$ איבר בחבורה המקיים: $ord(g)=s\cdot t$, כאשר $gcd(s,t)=1$.
(א) (15 נקודות) הוכיחו שקיימים $x,y\in G$ המקיימים: $g=xy=yx$, $ord(x)=s$, $ord(y)=t$.
(ב) (10 נקודות) הוכיחו כי לכל $g\in G$ הפירוק מסעיף א' הוא יחיד.

(4) (15 נקודות) יהי R חוג קומוטטיבי עם יחידה. נגדיר את תת הקבוצה של המטריצות המשולשיות העליונות,
$$Mat^{up}_{3\times 3}(R):=\{A\in Mat_{3\times 3}(R)|\ a_{ij}=0,\ \forall\ i>j\}.$$
נגדיר חבורה $Up:=Mat^{up}_{3\times 3}(R)\cap GL(3,R)$ ותת חבורה נורמלית שלה, $Up^{(1)}=\{A\in Up|\ a_{ii}=1,\ \forall\ i\}$.
חשבו/זהו את חבורת המנה $Up/Up^{(1)}$. (אין צורך לבדוק את העובדות $Up^{(1)}\lhd Up<GL(3,R)$)

(5) (15 נקודות) יהי R תחום ראשי ויהי $M\subset R^{\oplus 6}$ תת-מודול של מודול חופשי. נניח שמספר היוצרים המינימלי של M הינו 3. מה הערכים האפשריים של $rank(M)$? (לכל ערך אפשרי r תנו דוגמא עם $rank(M)=r$.)

(6) (10 נקודות) תהי G חבורה ו $K\in Syl_p(G)$ ו $H\lhd G$. הוכיחו/הפריכו (ע"י דוגמא נגדית): $K\cap H\in Syl_p(H)$.

בהצלחה!