מבנים אלגבריים. 201.1.7031.

סתיו 2017. (מרצה: דמיטרי קרנר)

תרגיל בית מס' 0.

התרגיל הינו תרגיל רענון על חומר הנדרש לקורס שלנו. חשוב לרשום פתרונות מלאים
לכל השאלות (לפני תחילת הסמסטר), אפילו אם השאלה נראת מאוד פשוטה.

בהמשך (ובמהלך כל הקורס שלנו) נסמן: $\Bbbk$- שדה (כלשהו); $V_\Bbbk$- מרחב וקטורי מעל $\Bbbk$; $Mat_{m\times n}(\Bbbk)$ מרחב המטריצות $m\times n$ עם רכיבים ב $\Bbbk$; $\mathbb{I}$- מטריצת יחידה; $\mathbb{O}$- מטריצת אפס; $\Bbbk[x]$- חוג הפולינומים מעל $\Bbbk$ במשתנה x.

(1) תנו הגדרה (מדויקת) למושגים הבאים: מרחב וקטורי V מעל שדה $\Bbbk$, תת מרחב וקטורי של V, הומומורפיזם של מרחבים וקטוריים, גרעין ותמונה של הומומורפיזם, איזומורפיזם.

(2) נתבונן בקבוצות הבאות: $V_1=\mathbb{R}[x]$, $V_2=\mathbb{C}[x]$, $V_3=\mathbb{R}[x^3]=Span_{\mathbb{R}}(1,x^3,x^6,x^9,\dots)$, $V_4=\mathbb{Q}[x]$, $V_5=Span_{\mathbb{R}}(x^3,x^4,x^7,x^8)$, $V_6=Span_{\mathbb{C}}(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-7\end{bmatrix})$, $V_7=Span_{\mathbb{R}}(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-7\end{bmatrix})$.

(א) אילו מהקבוצות הן מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{R}$? (ביחס לפעולות הרגילות של חיבור וכפל בסקלאר)

(ב) חשבו את המימדים של כל המרחבים שהתקבלו בסעיף א'.

(ג) אילו מהמרחבים הינם תתי-מרחב של מרחבים אחרים? תארו את כל החיתוכים האפשריים $V_i\cap V_j$. עבור אילו מהם מתקיים $Span_{\mathbb{R}}(V_i,V_j)=V_i\oplus V_j$?

(ד) אילו מהמרחבים הינם איזומורפיים (כמרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{R}$)?

(3) יהי V מרחב וקטורי מעל $\Bbbk$ ונקבע תתי מרחב $V,U\subset W$. הוכיחו שקילות של תאורים הבאים של $V+U$:

(א) $\{a\cdot u+b\cdot v|\ \forall a,b\in\Bbbk,\ \forall v\in V,\ \forall u\in U\}$.

(ב) חיתוך של כל התתי-מרחב של W המכילים את V,U.

(ג) תת-המרחב הקטן ביותר המכיל גם את V וגם את U.

(4) נתבונן בקבוצת השאריות מודולו n, $\mathbb{Z}_n=\{0,1,\dots,n-1\}$.

(א) בדקו שחיבור וכפל בקבוצה זאת הינן קומוטטיביות, אסוציאטיביות וכי תכונת דיסטריבוטיביות מתקיימת.

(ב) עבור אילו n הקבוצה היא שדה?

(ג) נקרא לאיבר $a\in\mathbb{Z}_n$ "יוצר" אם הסדרה $\{a,a+a,a+a+a,\dots,\}$ מכילה את כל האיברים של $\mathbb{Z}_n$. כמה יוצרים יש ל $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_p$? (כאן p - ראשוני) מה תנאי הכרחי ומספיק על n כך שכל $a\neq0$ בקבוצה הינו יוצר?

(5) (א) בדקו שפעולות חיבור וכפל ב $\Bbbk[x]$ הינן קומוטטיביות, אסוציאטיביות ותכונת דיסטריבוטיביות מתקיימת.

(ב) לאילו פולינומים קיים הופכי (בתוך $\Bbbk[x]$) ?

(ג) הוכיחו: אם $p(x)\cdot q(x)=0$ עבור $p(x),q(x)\in\Bbbk[x]$ אז $p(x)=0$ או $q(x)=0$.

(ד) תארו את כל הפולינומים האי-פריקים מעל $\mathbb{C}$.

(ה) תארו את כל הפולינומים האי-פריקים מעל $\mathbb{R}$.

(6) נתבונן בתת קבוצות הבאות של $Mat_{n\times n}(\Bbbk)$: $GL_n(\Bbbk):=\{A|\ det(A)\neq0\}$; $SL_n(\Bbbk):=\{A|\ det(A)=1\}$;
$Mat^{sym}_{n\times n}(\Bbbk)=\{A|\ A=A^t\}$; $Mat^{skew-sym}_{n\times n}(\Bbbk)=\{A|\ A=-A^t\}$;
$O(n):=\{A\in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})|\ AA^t=\mathbb{I}\}$; $SO(n):=\{A\in O(n)|\ det(A)=1\}$;
$U(n):=\{A\in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})|\ AA^*=\mathbb{I}\}$; $SU(n):=\{A\in U(n)|\ det(A)=1\}$;
$GL_n(\mathbb{Z}):=\{A\in Mat_{n\times n}(\mathbb{Z})|\ det(A)\neq0\}$
אילו מהן סגורות ביחס לכפל? אילו מהן מכילות הופכי עבור כל איבר שלהן?

(7) יהי $T_\phi \circlearrowright \mathbb{R}^2$ אופרטור הסיבוב בזווית ϕ. רשמו את המטריצה המייצגת $[T_\phi]$, ביחס לבסיס הסטנדרטי. נתבונן בקבוצה $\{[T_\phi],[T_\phi]^2,[T_\phi]^3,\dots\}$. מתי הקבוצה סופית? (מה התנאי הכרחי ומספיק על ϕ?) בדקו: הקבוצה הינה סופית אמ"מ אחת המטריצות בה הינה ההופכית של $[T_\phi]$ אמ"מ אחת המטריצות בה הינה $\mathbb{I}$.

(8) (א) מיינו את כל האופרטורים הלינאריים ההפיכים הפועלים על $\mathbb{R}^1$ אשר שולחים את הקטע $[-1,1]$ לעצמו, והצמצום $[-1,1]\xrightarrow{T}[-1,1]$ הינו על.

(ב) יהי $\Delta\subset\mathbb{R}^2$ משולש שקודקודיו הינם פתרונות של משוואה $z^3=1$. (כאן מזהים $\mathbb{R}^2\approx\mathbb{C}$.) מיינו את כל האופרטורים הלינאריים ההפיכים על $\mathbb{R}^2$ אשר שולחים את Δ לעצמו, והצמצום $\Delta\xrightarrow{T}\Delta$ הינו על. (רמז: מספיק לבדוק לאן הולכים הקצוות. יש בדיוק 6 אופרטורים.) רשמו את המטריצות המייצגות ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$. בדקו שקבוצת המטריצות הזאת סגורה ביחס לכפל והופכי. האם כל המטריצות האלו מתחלפות?

(9) (א) נקבע $U\in GL_n(\mathbb{k})$ ונגדיר העתקה $Mat_{n\times n}(\mathbb{k})\xrightarrow{\phi_U}Mat_{n\times n}(\mathbb{k})$ ע"י $\phi_U(A)=U^{-1}AU$. הוכיחו ש ϕ_U הינה איזומורפיזם. אילו מהתכונות הבאות מתקיימות? $\phi_U(A+B)=\phi_U(A)+\phi_U(B)$, $\phi_U(A\cdot B)=\phi_U(A)\cdot\phi_U(B)$, $\phi_{U+V}(A)=\phi_U(A)+\phi_V(A)$, $\phi_{U\cdot V}(A)=\phi_U(\phi_V(A))$, $\phi_{U\cdot V}=\phi_{V\cdot U}$.

(ב) נגדיר שקילות על $Mat_{n\times n}(\mathbb{k})$ ע"י: $A\sim B$ אם הן מאותה דרגה. הוכיחו שזאת אכן שקילות. רשמו מערכת נציגים (פשוטה ככל האפשר) למחלקות שקילות.

(ג) נגדיר שקילות על $Mat_{3\times3}(\mathbb{C})$ ע"י: $A\sim B$ אם $A=UBU^{-1}$, עבור $U\in GL_3(\mathbb{C})$. הוכיחו שזאת אכן שקילות. רשמו מערכת נציגים (פשוטה ככל האפשר) למחלקות שקילות.

(10) מרחב מנה. ניקח מרחב וקטורי ותת מרחב שלו, $V\subset W$.

(א) נגדיר יחס שקילות על W ע"י: $w_1\sim w_2$ אם $w_1-w_2\in V$. בדקו שזהו אכן יחס שקילות.

(ב) נסמן את קבוצת המנה ע"י W/V והאיברים שלה (מחלקות שקילות) ע"י $[w]$. נגדיר חיבור, $[w_1]+[w_2]=[w_1+w_2]$, וכפל באיבר השדה, $\alpha\cdot[w]=[\alpha\cdot w]$. הוכיחו שהפעולות מוגדרות היטב (לא תלויות בבחירת הנציגים).

(ג) הוכיחו ש W/V עם הפעולות האלו הינו מרחב וקטורי. (בדקו שהפעולות מקיימות את כל התכונות הטובות של מרחב וקטורי.) למרחב זה קוראים: מרחב מנה של W ביחס ל V.

(ד) ניקח $W=\mathbb{R}[x]$ ו $V=Span_{\mathbb{R}}(x^{n+1},x^{n+2},\dots)$. תארו בצורה מפורשת את המנה W/V. (רמז: פיתוח טיילור עד סדר n.)

(ה) כדי להתרגל למושג זה, שחקו עם כל מני תתי-מרחב של $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$. ובנו במפורש את מרחבי מנה

(ו) בהינתן $V\subset W$ נגדיר העתקה $W\xrightarrow{\pi_V}W/V$ ע"י $w\to[w]$. הוכיחו שזהו הומומורפיזם של מרחבים וקטוריים, ש- π_V הינו על ו $ker(\pi_V)=V$. (להעתקה הזאת קוראים: הטלה קנונית)

(ז) נניח ש $dim(W)<\infty$, הוכיחו: $dim W/V=dim(W)-dim(V)$.

(ח) יהי $U\subset W$ מרחב משלים ל V. הוכיחו: $U\approx W/V$. (אז למה להסתבך עם מרחב מנה המופשט? כי מרחב מנה מוגדר בצורה יחידה וקנונית.)

(11) נקבע הומומורפיזם של מרחבים וקטוריים, $\phi\in Hom_{\mathbb{k}}(V,W)$.

(א) הוכיחו כי הגרעין של ϕ הינו תת מרחב של V. הוכיחו כי התמונה של ϕ הינה תת מרחב של W.

(ב) נבנה מרחב מנה $V/ker(\phi)$. ניקח הטלה קנונית מהשאלה הקודמת, $V\xrightarrow{\pi_{ker(\phi)}}V/ker(\phi)$. נגדיר העתקה חדשה, $V/ker(\phi)\xrightarrow{j}W$, ע"י $[v]\to\phi(v)$. הוכיחו שההגדרה לא תלויה בבחירת הנציג.

(ג) הוכיחו שהעתקה j הינה הומומורפיזם חח"ע.

(ד) מה הקשר בין תמונה של ϕ לבין התמונה של j?

(ה) הוכיחו שההומומורפיזם התחלתי מתפרק להרכבה: $\phi=j\circ\pi_{ker(\phi)}$.