מבנים אלגבריים. 201.1.7031.

סתיו 2017. (מרצה: דמיטרי קרנר)

תרגיל בית מס' 1.

(להגשה עד 2017.11.07. השאלות להגשה: 4,5,6,9,10)

(1) אילו מהקבוצות הבאות מהוות חבורה?

i. $\mathbb{Z}$ עם הפעולה $a*b:=a-b$.
ii. $\mathbb{R}$ עם הפעולה $a*b:=a+b+ab$.
iii. $\mathbb{Q}$ עם הפעולה $a*b:=\frac{a+b}{5}$.
iv. $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ עם הפעולה $(a,b)*(c,d):=(ad+bc,bd)$.
v. $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ עם הפעולה $a*b:=\frac{a}{b}$.

(2) (א) יהי $\mathbb{k}$ שדה כלשהו. בדקו ש $(\mathbb{k},+,0)$, $(\mathbb{k}\setminus\{0\},\cdot,1)$ הינן חבורות אבליות.
(ב) יהי V מרחב וקטורי. הוכיחו: $(V,+,0)$ הינו חבורה אבלית.
(ג) תהי S קבוצת כל סדרות המספרים $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$, המקיימות: $|a_n-1|\le\frac{1}{n+1}$ עבור כל $n\ge 1$.
האם $(S,\cdot,\{1\})$ היא חבורה? (כאן המכפלה היא: $\{a_n\}\cdot\{b_n\}=\{a_nb_n\}$)

(3) (א) עבור כל איבר בחבורה הוכיחו $(x^{-1})^{-1}=x$.
(ב) תהי G חבורה. הוכיחו: עבור כל $x,y\in G$ מתקיים $(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}$.
(ג) נניח שעבור כל x,y בחבורה מתקיים: $(xy)^{-1}=x^{-1}y^{-1}$. האם החבורה בהכרח אבלית?
(ד) (חזקות בחבורות) נגדיר x^n (עבור $n\in\mathbb{Z}$ ו- $x\in G$), באופן הבא:
$$x^n=\begin{cases}1_G, & n=0\\ x^{n-1}\cdot x, & n>0\\ (x^{|n|})^{-1}, & n<0.\end{cases}$$
הוכיחו שלכל $n,m\in\mathbb{Z}$ מתקיים: $(x^n)^m=x^{n\cdot m}$ וגם $x^{n+m}=x^n\cdot x^m$.

(4) (א) הוכיחו שאיבר היחידה בחבורה הינו יחיד.
(ב) תהי $(G,\cdot,e)$ חבורה. נניח שאיבר $h\in G$ הינו יחידה שמאלית (כלומר, עבור כל $g\in G$ מתקיים: $hg=g$).
הוכיחו: $h=e$.

(5) בכל אחד מהמקרים הבאים בדקו האם הקבוצה הנתונה מהווה תת-חבורה של $GL_n(\mathbb{C})$:

i. $\{$מטריצות משולשיות עליונות$\}\subset Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$.
ii. $\{$מטריצות משולשיות עליונות, לא מנוונות$\}\subset GL_n(\mathbb{Q})$.
iii. $\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\middle|\, a,c\in\{-1,1\},\ b\in\mathbb{R}\right\}$.
iv. $\left\{\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}\middle|\, a,b\in\mathbb{R},\ a\cdot b\neq 0\right\}$.
v. $O(3)=\{A\in Mat_{3\times3}(\mathbb{R})|\ AA^t=\mathbb{I}_{3\times3}\}$.
vi. $\{A\in GL_n(\mathbb{C})|\ trace(A)=0\}$.
vii. מטריצות סימטריות לא מנוונות, $Mat^{sym}_{n\times n}(\mathbb{C})\cap GL_n(\mathbb{C})$.
viii. מטריצות לא מנוונות הניתנות ללכסון.

(6) (א) בדקו ש $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,0)$ הינה חבורה אבלית. (סימון בקורס שלנו: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_n$= שאריות מודולו n)
(ב) עבור אילו $n\in\mathbb{N}$ הקבוצה $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\setminus\{0\},\cdot,1)$ הינה חבורה? (מצאו תנאי הכרחי ומספיק)

(7) (א) הוכיחו שכל חבורה בעלת שני איברים הינה איזומורפית ל $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
($youtube:$ "$finite\ simple\ group\ of\ order\ two$")
(ב) תהא $(G,\cdot,e)$ חבורה עם בדיוק שלושה איברים, $G=\{e,a,b\}$.
הוכיחו: i. $ab=e$, ii. $a^2=b$, iii. $a^3=e$.
(ג) מיינו את כל החבורות בעלות שלושה איברים. (עד כדי איזומורפיזם)

(8) הוכיחו: אם $G_1<G_2$ ו $G_2<G_3$ אז $G_1<G_3$.

(9) (א) הוכיחו שכל חבורה $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,0)$ היא ציקלית. רשמו את כל היוצרים של חבורה $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z},+,0)$.
(ב) הוכיחו שחבורה $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}\setminus\{0\},\cdot,1)$ היא ציקלית. רשמו את כל היוצרים שלה. ומה לגבי $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}\setminus\{0\},\cdot,1)$?

(10) תהא $(G,\cdot,e)$ חבורה סופית.
(א) הוכיחו שלכל $a\in G$ קיים $n>0$ כך ש $a^n=e$.
(ב) הוכיחו שקיים $m>0$ כך שלכל $a\in G$ מתקיים $a^m=e$.
(ג) נניח ש G מסדר זוגי. הוכיחו שקיים $a\in G$, $a\neq e$ המקיים $a^{-1}=a$.