מבנים אלגבריים. 201.1.7031.

סתיו 2017. (מרצה: דמיטרי קרנר)

תרגיל בית מס' 10.

להגשה עד 12.01.2018. שאלות להגשה: 1 א, ג. 2 ה, ו. 3 ג. 4 א. 5 א, ג.

בתרגיל בית זה R תמיד חוג קומוטטיבי עם יחידה.

(1) (א) נגדיר $R[x_1,\dots,x_n]$= כל הפולינומים במשתנים $x_1,\dots,x_n$ עם מקדמים ב- R. בדקו ש $R[x_1,\dots,x_n]$ הינו חוג (קומוטטיבי עם יחידה) ביחס לפעולות הרגילות על פולינומים. בדומה נגדיר $R[[x_1,\dots,x_n]]$= חוג הטורים מעל R.

(i) בדקו: $R[x_1,\dots,x_n]=R[x_1][x_2]\dots[x_n]$, $R[[x_1,\dots,x_n]]=R[[x_1]][[x_2]]\dots[[x_n]]$.

(ii) מתי החוגים הם תחומי שלמות? (נסחו והוכיחו תנאי הכרחי ומספיק.)

(ב) עבור חבורה G (כלשהי) נגדיר את "חוג החבורה", $\Bbbk[G]$, להיות כל הפולינומים האפשריים באיברים של G עם מקדמים ב $\Bbbk$. (שימו לב, המשתנים לא בהכרח מתחלפים.) בדקו שזה אכן חוג, עם יחידה. מתי החוג קומוטטיבי?

(ג) זהו את החוגים: $\Bbbk[\mathbb{Z}]$, $\Bbbk[\prod_{i=1}^{n}\mathbb{Z}]$, $\Bbbk[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$, $\mathbb{R}[Q_8]/((-\mathbf{1})+\mathbf{1})\approx\mathbb{H}$ עבור $Q_8=\{\pm\mathbf{1},\pm\mathbf{i},\pm\mathbf{j},\pm\mathbf{k}\}$, $\Bbbk[D_8]/(\mathbf{b}^2+\mathbf{1})\approx Mat_{2\times2}(\Bbbk)$, (ראה סימון בשאלה 6 של ת.ב. 3)

(ד) הוכיחו: אם ב- G יש איבר מסדר סופי, אז $\Bbbk[G]$ אינו תחום שלמות.

(ה) במקרים הבאים זהו את $R^\times$: $R=\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$, $R=\Bbbk[[x_1,\dots,x_n]]$, $R=C^r((a,b))$.

(ו) הוכיחו: $A\in Mat_{n\times n}(R)$ הינה הפיכה אם"ם $det(A)$ הינו איבר הפיך ב- R. האם תנאי $det(R)\neq 0$ גם מספיק?

(2) (הכללה של שדה מנות) תהי $D\subseteq R$ תת קבוצה הסגורה תחת כפל, ונניח ש- $1\in D$.

(א) נגדיר יחס על $R\times D$: $(a_1,d_1)\sim(a_2,d_2)$ אם $(a_1d_2-a_2d_1)f=0$ עבור $f\in D$ מסוים. הראו שזה יחס שקילות.

(ב) נסמן את מחלקת השקילות של (a,d) על ידי $\frac{a}{d}$ ותהי $D^{-1}R:=R\times D/\sim$, כקבוצה. נניח ש $0\in D$, זהו את $D^{-1}R$.

(ג) בהמשך נניח: $0\notin D$. נגדיר חיבור וכפל על $D^{-1}R$ על ידי $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$, $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. הראו שהפעולות מוגדרות היטב, וש-$D^{-1}R$ הוא חוג קומוטטיבי עם יחידה. (ובפרט לא חוג האפס.) השם: $Localization\ of\ R\ at\ D$.

(ד) הראו שהעתקה $R\xrightarrow{\iota}D^{-1}R$ המוגדרת על ידי $\iota(a)=\frac{a}{1}$ היא הומומורפיזם של חוגים, וש- $ker(\iota)=\{a\in R|\exists d\in D:\ ad=0\}$.

(ה) זהו את $D^{-1}R$ במקרים הבאים: i. $R=\mathbb{Z}$, $D=\{5^i17^j\}_{i,j\in\mathbb{N}}$. ii. $R=\Bbbk[[x]]$, $D=\{(x-2)^j\}_{j\in N}$. iii. R- תחום שלמות, $D=R\setminus\{0\}$. iv. $R=\Bbbk[x,y]/(x\cdot y)$, $D=\{x^j\}_{j\in\mathbb{N}}$. v. $R=\Bbbk[x]$, $D=R\setminus(x)$.

(ו) הראו ש- $D^{-1}R$ הינו הרחבה מינימלית של R שבה איברי D הפיכים. כלומר, כל הומומורפיזם $R\xrightarrow{\phi}S$ (של חוגים קומוטטיביים עם יחידה), המקיים $\phi(D)\subseteq S^\times$, מתפרק כ- $\phi=\psi\circ\iota$, כאשר הומומורפיזם $D^{-1}R\xrightarrow{\psi}S$ הינו יחיד.

(3) יהי $n\in\mathbb{Z}$, $n>3$ חפשי מריבוע, כלומר לא מתחלק בריבוע של שלם חוץ מ ±1. נסמן $R=\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.

(א) הוכיחו כי 2, 3, $\sqrt{-n}$, $1+\sqrt{-n}$ הם אי-פריקים ב- R.

(ב) הוכיחו כי R איננו חוג עם פריקות חד-ערכית (מצאו אי-פריק שאיננו ראשוני).

(ג) מצאו ב-R אידאל לא ראשי. (רמז: התבוננו באידאל הנוצר ע"י האיבר האי-פריק שאיננו ראשוני מסעיף ב. חקרו את האידאל המקסימלי שמכיל אותו.)

(4) עבור אידאל $I\subseteq R$, נגדיר את הרדיקל של I ע"י: $\sqrt{I}:=\{r\in R|\ r^n\in I$ עבור $n\gg1\}$. (בדקו שזהו אידאל.) בפרט נגדיר $\nu(R)=\sqrt{(0)}$, nilradical של R (השם מתורגם לעברית כ'שרשון אפיסוני'), והוא אוסף כל הנילפוטנטים בחוג.

(א) הראו ש- $\sqrt{I}/I\subseteq R/I$ הוא הנילרדיקל, כלומר $\sqrt{I}/I=\nu(R/I)$. בפרט, בחוג $R/\nu(R)$ אין נילפוטנטים.

(ב) הוכיחו כי $\nu(R)=\bigcap\{\mathfrak{p}\subset R|\ \mathfrak{p}-$ ראשוני$\}$. הדרכה: עבור הכלה $\supseteq$ הראו שאם $x\in R$ אינו נילפוטנטי, אז קיים אידאל ראשוני שלא מכיל את x. לשם כך בנו אידאלים שאינם מכילים את $x,x^2,x^3,\dots$ והשתמשו בלמה של צורן כדי לבנות אחד מקסימלי עם תכונה זו - שימו לב שזה לא בהכרח אידאל מקסימלי. הראו שמה שקיבלתם זה אידאל ראשוני.

(ג) הכלילו את הסעיף הקודם: הראו כי לכל $I\subset R$ מתקיים: $\sqrt{I}=\bigcap\{\mathfrak{p}\subset R|\ I\subseteq\mathfrak{p}-$ ראשוני$\}$.

(5) עבור אידאל $I\subset R$ נגדיר $J(I)=\cap\{\mathfrak{m}\subset R|\ I\subseteq\mathfrak{m}-$ מקסימלי$\}$. בפרט $J(0)$ נקרא רדיקל Jacobson של החוג R.
שימו לב ש- $J(I)$ הוא המקור ב-R של רדיקל Jacobson של R/I תחת ההומומורפיזם הקנוני.

(א) הראו ש- $J(I)$ הוא אידאל של R המכיל את $\sqrt{I}$.

(ב) לכל $1<n\in\mathbb{Z}$ תארו את $J(n\mathbb{Z})$ בעזרת הפירוק הראשוני של n.

(ג) הוכיחו כי $x\in J(0)$ אם ורק אם $1-xy$ הפיך, לכל $y\in R$.

רמז: הראו תחילה שאם $a\in R$ לא הפיך אז קיים אידאל מקסימלי $M\subset R$ כך ש $a\in M$.