מבנים אלגבריים. 201.1.7031.

סתיו 2017. (מרצה: דמיטרי קרנר)

תרגיל בית מס' 11.

<u>בתרגיל בית זה R תמיד חוג קומוטטיבי עם יחידה.</u>

(1) (א) האם חוג $\mathbb{k}[x,y,z,w]/_{(xy-zw)}$ הינו תחום פריקות יחידה? (רמז: בחוג זה מתקיים: $x\cdot y=z\cdot w$)

(ב) הוכיחו/הפריכו: אם R הינו תחום שלמות אז עבור כל $0\neq x,y\in R$ מתקיים: $gcd(x,y)\in(x)+(y)$.

(ג) יהי R תחום ראשי, ויהיו $(a),(b)\subset R$ שני אידאלים. הוכיחו שהם קו-מקסימליים אם ורק אם $\gcd(a,b)=1$..

(ד) הוכיחו שבתחום ראשי כל אידאל ראשוני הינו מקסימלי.

(2) (א) נגדיר $p(x)=x^3+2x^2+x-6$, $q(x)=x^4+4x^3-9x^2-16x+20\in\mathbb{Q}[x]$. מצאו $gcd\big(p(x),q(x)\big)$, $lcm\big(p(x),q(x)\big)$.

(ב) יהי R תחום שלמות ו- $a,b\in R$. הוכיחו: אם $lcm(a,b)$, $gcd(a,b)$ קיים אז הוא יחיד עד כדי כפל באיבר הפיך של R.

(ג) הוכיחו: אם R תחום פריקות יחידה אז $lcm(a,b)$, $gcd(a,b)$ קיימים עבור כל $0\neq a,b\in R$.

(ד) יהי R תחום ראשי ו- $0\neq a,b\in R$. הוכיחו: $(a)\cap(b)=\big(lcm(a,b)\big)$, $(a)+(b)=\big(gcd(a,b)\big)$.

(3) הוכיחו שתחום שלמות R הינו תחום ראשי אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

(i) לכל $a,b\in R$ קיים מחלק משותף מקסימלי d וכן קיימים $s,t\in R$ כך ש $d=ra+sb$.

(ii) תנאי השרשרת היורדת של מחלקים: אם $\{a_i\}_{i\geq1}\in R$ מקיימים $\{a_{i+1}|a_i\}_{i\geq1}$, אז $a_n\sim a_{n+1}\sim\cdots$ עבור $n\gg1$..

(4) (א) יהי $n\in\mathbb{Z}$ לא ריבוע שלם. הוכיחו: $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]\approx\mathbb{Z}[x]/_{(x^2-n)}$, $Frac(\mathbb{Z}[\sqrt{n}])=\mathbb{Q}[\sqrt{n}]=\{a+b\sqrt{n}|\ a,b\in\mathbb{Q}\}$.

(ב) נגדיר $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]\stackrel{N}{\to}\mathbb{Q}$ ע"י $a+b\sqrt{n}\to a^2-b^2n$. בדקו: i. $N(z)=0$ אם"ם $z=0$. ii. $N(zw)=N(z)N(w)$.

(5) (א) הוכיחו שחוגים הבאים (עם פונקציה N) הינם תחומים אוקלידיים:

(i) $\mathbb{k}[x]$ עם $N(p(x))=deg(p(x))$. $\mathbb{k}[[x]]$ עם $N(f(x))=ord(f(x)):=sup\{j|f(x)\in(x)^j\}$.

(ii) $\mathbb{Z}[i]$ עם $N(a+ib)=a^2+b^2$. הדרכה: עבור כל $a+ib,c+id$ הציגו $\frac{a+ib}{c+id}=x+iy$. כאן $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $x,y\in\mathbb{Q}$. בחרו $u,v\in\mathbb{Z}$ כך ש $|x-u|\leq\frac{1}{2}$, $|y-v|\leq\frac{1}{2}$.

בדקו: $a+ib=(c+id)(u+iv)+r$, $R\in\mathbb{Z}[i]$ כאשר $r=0$ או $N(r)<N(a+ib)$.

(ב) (הכללה של תחום אוקלידי) יהי R תחום שלמות עם פונקציה $R\setminus\{0\}\stackrel{N}{\to}\mathbb{Z}_{\geq0}$ המקיימת: לכל $\alpha,\beta\in R\setminus\{0\}$, עם $N(\alpha)\geq N(\beta)$, או מתקיים $\beta\mid\alpha$ או קיימים $s,t\in R$ כך ש- $s\alpha-t\beta\neq0$, $0\leq N(s\alpha-t\beta)<N(\beta)$.

הראו ש-R הוא תחום ראשי.

(6) (א) אילו מהחוגים הבאים הם תחומים ראשיים: $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[2i]$, $\mathbb{Z}[3i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{k}[[x]]$, $\mathbb{R}\{x\}$?

(ב) הוכיחו שכל האידאלים בחוג $\mathbb{k}[[x]]$ הם מהצורה (x^n).

(7) (פירוק של פונקציה רציונאלית לשברים פשוטים.) יהי $\mathbb{k}$ שדה ותהי $\deg(f)$ דרגה של $f\in\mathbb{k}[x]$. (נקבע: $\deg(0)=-\infty$.)

(א) יהיו $f_1,f_2\in\mathbb{k}[x]$ כך ש- $d_i:=\deg(f_i)>0$ וגם $gcd(f_1,f_2)=1$. הוכיחו: אם $g(x)\in\mathbb{k}[x]$, $\deg(g)<d_1+d_2$ אזי קיימים $u_1(x),u_2(x)\in\mathbb{k}[x]$ כך ש $g(x)=u_2(x)f_1(x)+u_1(x)f_2(x)$ וכן $\deg(u_i)<\deg(f_i)$.

(ב) הסיקו שבשדה השברים (מנות), $\mathbb{k}(x)$ של $\mathbb{k}[x]$, כל שבר ניתן לפירוק, $\frac{g(x)}{f_1(x)f_2(x)}=\frac{u_1(x)}{f_1(x)}+\frac{u_2(x)}{f_2(x)}$.

(ג) נקבע פירוק לגורמים ראשוניים, $f(x)=\prod_{i=1}^k p_i(x)^{r_i}\in\mathbb{k}[x]$. הוכיחו כי לכל $g(x)\in\mathbb{k}[x]$ עם $\deg(g)<\deg(f)$ קיימים $g_i(x)\in\mathbb{k}[x]$, עם $\deg(g_i)<\deg(p_i^{r_i})$, כך ש $\frac{g(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^k\frac{g_i(x)}{p_i(x)^{r_i}}$ ב- $\mathbb{k}(x)$.

(ד) יהיו $0\neq p(x),g(x)\in\mathbb{k}[x]$ המקיימים $\deg(g)<\deg(p^r)$. הוכיחו שקיימים $\{a_i(x)\in\mathbb{k}[x]\}_{i=1..r}$, $\deg(a_i)<\deg(p)$ כך ש $g(x)=a_r(x)+a_{r-1}(x)p(x)+\cdots+a_1p(x)^{r-1}$. ואז ב- $\mathbb{k}(x)$ מתקיים: $\frac{g(x)}{p(x)^r}=\frac{a_1(x)}{p(x)}+\cdots+\frac{a_{r-1}(x)}{p(x)^{r-1}}+\frac{a_r(x)}{p(x)^r}$

(ה) יהי $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ ראשוני. הוכיחו: $\deg(f)\leq2$.

(ו) הסיקו שלכל $0\neq f(x),g(x)\in\mathbb{R}[x]$, קיים $q(x)\in\mathbb{R}[x]$ כך שב- $\mathbb{R}(x)$ מתקיים:

$$\frac{g(x)}{f(x)}=q(x)+\sum_{i=1}^m\sum_{t_i=1}^{r_i}\frac{a_{i,t_i}}{(x-\alpha_i)^{t_i}}+\sum_{j=1}^n\sum_{t_j=1}^{s_j}\frac{b_{j,t_j}x+c_{j,t_j}}{(x^2+\beta_jx+\gamma_j)^{t_j}}$$

כאשר $a_{i,t_i},b_{j,t_j},c_{j,t_j},\alpha_i,\beta_j,\gamma_j\in\mathbb{R}$ ולכל j, ל- $x^2+\beta_jx+\gamma_j$ אין שורש ממשי.

(ז) חקרו את יחידות הפרוק הנ"ל.