מבנים אלגבריים. 201.1.7031.

סתיו 2017. (מרצה: דמיטרי קרנר)

תרגיל בית מס' 12. לא להגשה.

(1) (א) נקבע תת-מודולים $\{M_\alpha\}$ של מודול ${}_RM$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים (אז נרשום: $M=\oplus M_\alpha$)

(i) לכל $m\in M$ קיימת הצגה $m=\sum m_\alpha$ והיא יחידה.

(ii) $M=\sum M_\alpha$ ועבור כל α מתקיים $M_\alpha\cap\Big(\sum_{\beta\neq\alpha}M_\beta\Big)=\{0\}$.

(ב) תנו דוגמא לאידאל $I\subset R$ שמתפרק לסכום ישר (לא טריוויאלי) כמודול מעל R. (ניתן לקחת $R=\Bbbk[x,y]/_{(x\cdot y)}$)

(ג) נניח ש $M=\oplus M_\alpha$ ויהי $I\subset R$ אידאל. הוכיחו: $M/_{I\cdot M}=\oplus M_\alpha/_{I\cdot M_\alpha}$.

(ד) מודול שלא מתפרק לסכום ישר לא טריוויאלי נקרא אי-פריק. אילו מרחבים וקטוריים הינם אי-פריקים במובן זה?

(ה) האם מודול ציקלי בהכרח אי-פריק?

(רמז: חתבוננו בתת-חוג $Span_\Bbbk\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)\subset Mat_{2\times2}(\Bbbk)$ כמודול מעל עצמו)

(2) יהי V מרחב וקטורי מעל $\Bbbk$ ונקבע $T\in End(V)$. נגדיר חוג $\Bbbk[T]$= (כל הפולינומים ב- T עם מקדמים ב- $\Bbbk$).

(א) יהי $m_T(x)$ פולינום מינימלי של T. בדקו: $\Bbbk[T]\approx\Bbbk[x]/_{(m_T(x))}$. בדקו ש- V הינו מודול מעל $\Bbbk[T]$.

(ב) עבור כל $\lambda\in\Bbbk$, $n\in\mathbb{N}$ נגדיר מרחב עצמי מוכלל, $V_{n,\lambda}:=ker(\lambda\cdot Id_V-T)^n\subseteq V$. הוכיחו ש $V_{n,\lambda}$ אי-פריק אם"ם הוא ציקלי. הוכיחו ש $V_{1,\lambda}\subseteq V_{2,\lambda}\subseteq\cdots\subseteq V$ הינה שרשרת של תת-מודולים (מעל $\Bbbk[T]$).

(ג) תארו את השרשראות $\{V_{n,\lambda}\}$ עבור מקרים הבאים:

(i) $T\circlearrowright\mathbb{R}^2$ אופרטור הסיבוב בזווית ϕ נגד כיוון השעון סביב הראשית. (כאן הבדילו בין $\phi=\pm\pi$ לבין $\phi\neq\pm\pi$.)

(ii) $T\circlearrowright\Bbbk^n$ מוגדר ע"י $T(x_1,\dots,x_n)=(0,x_1,\dots,x_{n-1})$.

(3) יהי $R=\Bbbk[x]$ ונגדיר $M:=\{(p(x),q(x))\in R^2|\ (x^2-3)p(x)+(x^3-3)q(x)=0\}$.
הוכיחו ש $M\subseteq R^2$ הינו תת-מודול. האם הוא ציקלי? חופשי? אי-פריק?

(4) יהי R אחד מ $\Bbbk[\underline{x}]$, $\Bbbk[[\underline{x}]]$ ונגדיר אידאל $I=\sum(x_i)$. מה מספר היוצרים הקטן ביותר של I כמודול מעל R?

(5) יהי R חוג (לא בהכרח קומוטטיבי, לא בהכרח עם יחידה), יהי ${}_RM$ -מודול שמאלי ו- $N\subset M$ תת-מודול.

(א) בהרצאה הגדרנו מודול-מנה עם ההיטל, $M\xrightarrow{\pi}M/_N$. בדקו את כל הפרטים של הבניה:

(i) $M/_N$ אכן מודול מעל R. π אכן הומומורפיזם על.

(ii) עבור כל הומומורפיזם $M\xrightarrow{\phi}L$ כך ש $\phi(N)=0$ הוכיחו: ϕ מתפרק להרכבה $M\xrightarrow{\pi}M/_N\xrightarrow{j}L$, כאן j יחיד.

(ב) תהי $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ מערכת של יוצרים של M. הוכיחו ש $\{\pi(x_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ הינם יוצרים של $M/_N$.

(ג) יהי $I\subset R$ אידאל דו צדדי. נבנה מנות: $R\xrightarrow{\pi_R}R/_I$, $M\xrightarrow{\pi_M}M/_{I\cdot M}$. הוכיחו כי $M/_{I\cdot M}$ הינו מודול מעל $R/_I$ ועבור כל $m\in M$, $r\in R$ מתקיים: $\pi_M(r\cdot m)=\pi_R(r)\cdot\pi_M(m)$.

(ד) יהי $\mathrm{ann(M)}\subset\mathrm{R}$ המאפס של M. (בדקו ש- $\mathrm{ann(M)}$ הינו אידאל דו-צדדי.) הוכיחו כי M הינו מודול מעל $R/_{\mathrm{ann(M)}}$.

(6) (א) יהי R תחום ראשי ו $M=R$ (כמודול מעל עצמו). הוכיחו: כל תת-מודול של M הינו ציקלי.
האם זה מתקיים גם בשביל תחום פריקות יחידה?

(ב) הוכיחו: אם $M/_N$ ו- N נוצרים סופית אז גם M נוצר סופית.

(ג) יהי R חוג קומוטטיבי. הוכיחו/הפריכו: R ציקלי כמודול מעל עצמו אם"ם R חוג עם יחידה.

(7) בהרצאה הגדרנו: $\mathrm{Tor(M)}:=\{\mathrm{m}\in\mathrm{M}|\ \mathrm{r}\cdot\mathrm{m}=0,$ עבור איזשהו $r\in R$ שאינו מחלק אפס $\}$

(א) בדקו ש $\mathrm{Tor(M)}\subset\mathrm{M}$ הינו תת-מודול ומתקיים $\mathrm{Tor}(M/_{Tor(M)})=\{0\}$. בדקו: אם M מודול חופשי אז $\mathrm{Tor(M)}=\{0\}$.

(ב) חשבו $\mathrm{Tor(M)}$, $\mathrm{ann(Tor(M))}$ עבור מודולים הבאים, מעל $\mathbb{Z}$:

i. $M=\mathbb{Z}^n\oplus\mathbb{Z}/_{pq\mathbb{Z}}\oplus\mathbb{Z}/_{qr\mathbb{Z}}\oplus\mathbb{Z}/_{pr\mathbb{Z}}$. ii. $M=\oplus\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ (הסכום על כל הראשוניים).

(ג) הוכיחו/הפריכו: $\mathrm{Tor}(\oplus\mathrm{M}_\alpha)=\oplus\mathrm{Tor}(\mathrm{M}_\alpha)$, $\mathrm{Tor}(\cap\mathrm{M}_\alpha)=\cap\mathrm{Tor}(\mathrm{M}_\alpha)$,
$\mathrm{ann}(\oplus\mathrm{M_i})=\cap\mathrm{ann}(\mathrm{M_i})$, $\mathrm{ann}(\cap\mathrm{M}_\alpha)=\sum\mathrm{ann}(\mathrm{M}_\alpha)$.

(ד) יהי R תחום שלמות. נניח ש- $\mathrm{Tor(M)}$ נוצר סופית. הוכיחו: $\mathrm{ann(Tor(M))}\neq\{0\}$.

(ה) יהי M_R מודול ציקלי מעל תחום שלמות ונניח $\mathrm{Tor(M)}=\{0\}$. האם M בהכרח חופשי?

(ו) הראו שכל הומומורפיזם $M\xrightarrow{\phi}N$ משרה הומומורפיזם של פיתולים שלהם $\mathrm{Tor(M)}\xrightarrow{\phi|_{\mathrm{Tor(M)}}}\mathrm{Tor(N)}$. (בפרט, איזומורפיזם של מודולים משרה איזומורפיזם של פיתולים.) ומה לגבי $\mathrm{ann(M)}$?

(ז) לפעמים מגדירים פיתול כ: $\mathrm{Tor(M)}:=\{\mathrm{m}\in\mathrm{M}|\ \mathrm{r}\cdot\mathrm{m}=0,\ 0\neq r\in R$ עבור איזשהו $\}$. הראו שאז התכונות של א' לא מתקיימות. בפרט הראו שאם ל-R יש מחלקי אפס אז לכל R-מודול לא טריוויאלי M מתקיים $\mathrm{Tor(M)}\neq\{0\}$.