מבנים אלגבריים. 201.1.7031.

סתיו 2017. (מרצה: דמיטרי קרנר)

תרגיל בית מס' 13.

(1) יהי M מודול ציקלי מעל חוג קומוטטיבי עם יחידה, R. הוכיחו: $M\approx R/_{\mathrm{ann}(M)}$.

(2) יהי $I\subset R$ אידאל, בחוג קומוטטיבי עם יחידה, ונקבע מודול M. נגדיר $\Gamma_I(M):=\{m\in M|\ I^n\cdot m=\{0\},\ for\ n\gg1\}$.
הראו ש $\Gamma_I(M)\subseteq M$ הוא תת מודול. הראו שכל הומומורפיזם $M_1\xrightarrow{\phi}M_2$ משרה את ההומומורפיזם $\Gamma_I(M_1)\xrightarrow{\phi|_{\Gamma_I(M_1)}}\Gamma_I(M_2)$.

(3) יהי $R=\mathbb{Z}[x]$ ונגדיר אידאל $I=(2,x)\subset R$. האם I פריק כמודול מעל R?

(4) יהי R קומוטטיבי עם יחידה. בדקו ש- $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ (אוסף של כל ההומומורפיזמים של מודולים) הינו מודול מעל R.
(א) בדקו ש $S:=\mathrm{Hom}_R(M,M)$ הינו חוג תחת פעולות חיבור והרכבה. (בפרט S ציקלי כמודול מעל עצמו.)
(ב) הראו ש $\mathrm{Hom}_R(R,M)\cong M$ כ R-מודולים. הראו ש $\mathrm{Hom}_R(R,R)\approx R$ כחוגים.
(ג) הוכיחו ש $M:=\bigoplus_{k=1}^{\infty}R$ הינו מודול חופשי מעל R. נגדיר $S:=\mathrm{Hom}_R(M,M)$.
(i) נקבע בסיס סטנדרטי של M, $e_1,e_2,\dots$. נגדיר הומומורפיזמים $M\xrightarrow{\phi_1,\phi_2}M$ ע"י $\phi_1\{e_{2n}\}=e_n$, $\phi_1\{e_{2n+1}\}=0$, $\phi_2\{e_{2n}\}=0$, $\phi_2\{e_{2n+1}\}=e_n$. הוכיחו כי הקבוצה $\{\phi_1,\phi_2\}$ הינה בסיס ל S, כמודול מעל עצמו.
(ii) הוכיחו כי לכל $0<m,n<\infty$ מתקיים $S^n\approx S^m$, כ- S -מודולים.

(5) יהי R תחום שלמות ו $\mathbb{K}:=Frac(R)$ שדה מנות שלו. יהי M מודול מעל R. נגדיר קבוצה $\mathbb{K}\cdot M:=\{[\frac{a}{b}z]|\ 0\neq b,a\in R,\ z\in M\}$ עם שקילות הנוצרת ע"י $[\frac{a}{b}z]=[\frac{ca}{cb}z]$ עבור כל $0\neq c\in R$.
(א) הוכיחו ש- $\mathbb{K}\cdot M$ הינו מודול מעל $\mathbb{K}$, כלומר מרחב וקטורי. (הגדיר פעולות חיבור, חיסור וכפל באיבר של $\mathbb{K}$.)
(ב) זהו את $\mathbb{K}\cdot R^n$. יהי $I\subset R$ אידאל, זהו את $\mathbb{K}\cdot I$. עבור $R=\Bbbk[x,y]$, $M=\Bbbk[x,y]/_{(y^2-x^3)}$ זהו את $\mathbb{K}\cdot M$.
(ג) נגדיר העתקה $\mathbb{K}\cdot M\xrightarrow{\phi}M$ ע"י $z\to[\frac{1}{1}z]$. הוכיחו: $\phi^{-1}(0)=Tor(M)$. (סימון: $\mathbb{K}\cdot Tor(M)=\{0\}$.)
(ד) הוכיחו/הפריכו: $\mathbb{K}\cdot(\sum M_i)=\sum\mathbb{K}\cdot M_i$, $\mathbb{K}\cdot(\cap M_i)=\cap(\mathbb{K}\cdot M_i)$, $\mathbb{K}\cdot(\oplus M_i)=\oplus(\mathbb{K}\cdot M_i)$.

(6) יהי M מודול מעל תחום שלמות R. תזכורת: הדרגה של מודול, $\mathrm{rank}(M)$, הינה הגודל המקסימלי של קבוצה בת"ל ב M.
(א) הוכיחו: $rank(M)=dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}\cdot M)$. (ראו שאלה 5.) הסיקו: אם $0\neq I\subset R$ אז $rank(I)=1$.
(ב) הוכיחו: $\mathrm{rank}(\oplus M_i)=\sum\mathrm{rank}(M_i)$. $\mathrm{rank}(\mathrm{Tor}(M))=0$. $\mathrm{rank}(M/_{\mathrm{Tor}(M)})=rank(M)$.
(ג) נניח ש $\mathrm{rank}(M)=n$ ותהי $\{x_1,...,x_n\}\subset M$ קבוצה בת"ל. נגדיר $N=Span_R(\{x_i\})=\sum Rx_i$.
הוכיחו כי $N\approx R^n$. הוכיחו כי $M/_N$ הינו מודול פיתול. (ניסוח שקול: לכל $m\in M$ קיים $0\neq r\in R$ כך ש $rm\in N$.)
(ד) הוכיחו: $M/_N$ הינו מודול פיתול אם"ם $\mathrm{rank}(M)=\mathrm{rank}(N)$.
(ה) הוכיחו: עבור $N\subset M$ מתקיים $rank(M)=rank(M/_N)+rank(N)$.

(7) יהי R תחום ראשי, נקבע $0\neq a\in R$ וניקח $M=R/_{(a)}$. יהי $p\in R$ ראשוני.
(א) הראו ש- $pM\approx(p)+(a)/_{(a)}$ והסיקו: אם $a\nmid p$ אזי $pM\approx M$, ואם $p\mid a$ אזי $pM\approx(p)/_{(a)}$.
(ב) הוכיחו שהכפלה ב- (x^2-2) מגדירה איזומורפיזם של $\mathbb{Q}[x]/_{(\sum_{j=0}^{17}x^j)}$, מודול מעל $\mathbb{Q}[x]$.
(ג) נקבע $a_1,\dots,a_n\in R$ כך ש- p מחלק את כולם. נגדיר $M=\oplus R/_{(a_i)}$. הוכיחו: $M/_{p\cdot M}\approx\Bbbk^n$, עבור שדה $\Bbbk$.

(8) (א) מיינו את כל החבורות האבליות מסדר 27, 50, 375, 105. הציגו אותן פעם בצורה של מחלקים אלמנטריים ופעם בצורה של גורמים אינווריאנטיים.
(ב) יהי $R=\mathbb{R}[x]$ ונגדיר $M_R=R/_{(x-1)^2}\oplus R/_{(x-1)(x^2+1)^4}\oplus R/_{(x+2)(x^2+1)^2}$. כתבו את M כסכום ישר של מודולים ציקליים בצורה של מחלקים אלמנטריים ובצורה של גורמים אינווריאנטיים.

(9) (א) מצאו בסיס למודולים הבאים:

$$M_{\mathbb{Z}}=Span_{\mathbb{Z}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\5\end{bmatrix}\right)\subset\mathbb{Z}^3.\quad M_{\mathbb{Q}[x]}=Span_{\mathbb{Q}[x]}\left(\begin{bmatrix}2x-1\\x\\x^2+3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\x\\x^2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x+1\\2x\\2x^2-3\end{bmatrix}\right)\subseteq\mathbb{Q}[x]^3$$

$$M_Z=\{(x_1,x_2,x_3)|x_1+2x_2+3x_3=0,\ x_1+4x_2+9x_3=0\}\subseteq\mathbb{Z}^3$$

(ב) נגדיר $M_{\mathbb{Z}}=Span_{\mathbb{Z}}\Big((2,1,-3),(1,-1,2)\Big)\subset\mathbb{Z}^3$. מצא את המבנה של $\mathbb{Z}^3/_N$.
(ג) נגדיר $M_R=Span_R\Big((1,3,6),(2+3i,-3i,12-18i),(2-3i,6+9i,-18i)\Big)\subset R^3$, עבור $R=\mathbb{Z}[i]$.
מצא את המבנה של $\mathbb{R}^3/_M$.

(10) עבור מטריצות הבאות רשמו את הצורה הנורמאלית של Smith :

$$\begin{bmatrix} x^3+6 & x^2-7 \\ x^2+7 & x^3-6 \end{bmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\Bbbk[x]), \quad \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} x^{j+2} & 1+x \\ \sum_{j=0}^{\infty}(-x^j) & 1-x \end{bmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\Bbbk[[x]]).$$

(11) הוכיחו ש- $\mathbb{Q}$ אי-פריק כ- $\mathbb{Z}$- מודול. האם זה סותר את משפט מיון המודולים מעל תחום ראשי?

(12) הוכיחו את היחידות במשפט המבנה למודולים נוצרים סופית מעל תחום ראשי, כלומר הוכיחו שאם M_1, M_2 הם שני מודולים נוצרים סופית מעל תחום ראשי R אזי הם איזומורפיים אם ורק אם יש להם את אותה הדרגה ואת אותם הגורמים האינוויאנטיים.

<u>שאלות חזרה</u>

(13) (הצבה) יהי R חוג קומוטטיבי ו $f_1(x), \ldots, f_r(x) \in R[x]$.

(א) עבור כל $a \in R$ הוכיחו: $(f_1(x), \ldots, f_r(x), x-a) = (f_1(a), \ldots, f_r(a), x-a)$;

$R[x]/(f_1(x), \ldots, f_r(x), x-a) \approx R[x]/(f_1(a), \ldots, f_r(a), x-a)$.

(ב) עבור כל $a_1, \ldots, a_n \in R$ הוכיחו $R \approx R[x_1, \ldots, x_n]/(x_1-a_1, \ldots, x_n-a_n)$.

(14) יהי R תחום שלמות, ניקח שדה מנות שלו, $\mathbb{K} := Frac(R)$. הוכיחו: $Frac(R[x]) \approx Frac(\mathbb{K}[x])$.