מבנים אלגבריים. 201.1.7031.

סתיו 2017. (מרצה: דמיטרי קרנר)

תרגיל בית מס' 2.

להגשה עד 19.11.2017. שאלות להגשה: 1, ו-ט; 2, א-ב, ה-ו; 4, ג,ד.

(1) תהי $G=<x>$ חבורה ציקלית.

(א) הוכיחו שכל תת-חבורה $H<G$ ניתנת להצגה כ $H=<x^d>$, כאשר $d=min\{n\in\mathbb{Z}_{>0}|x^n\in H\}$.

(ב) הוכיחו: אם $|G|=\infty$, אז לכל $a\neq b\in\mathbb{N}$ מתקיים $<x^a>\neq<x^b>$. יתר על כן, הוכיחו שתת החבורות הלא טירוויאליות של G נמצאות בהתאמה $1:1$ עם המספרים $\mathbb{Z}_{>0}$.

(ג) עבור כל $n\ge 1$ נגדיר תת-חבורה $n\mathbb{Z}=\{n\cdot k|\ k\in\mathbb{Z}\}\subset\mathbb{Z}$. מתי $n\mathbb{Z}\cup m\mathbb{Z}$ הינה תת-חבורה של $\mathbb{Z}$? מתי מתקיים $(n\mathbb{Z},m\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$? (החבורה הנוצרת)

(ד) הוכיחו: אם $|G|=n$, אזי לכל $a\in N$ המחלק את n, קיימת תת-חבורה יחידה של G מסדר a, והיא $<x^{\frac{n}{a}}>$. כמו כן, לכל $m\in\mathbb{Z}$, מתקיים: $<x^m>=<x^{\gcd(m,n)}>$, לכן תת החבורות של $|G|$ נמצאות בהתאמה $1:1$ עם המחלקים החיוביים של n.

(ה) נגדיר את $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ להיות קבוצת כל האיברים ההפיכים (ב $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) ביחס לכפל. הוכיחו: $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times,\cdot,1)$ הינה חבורה מסדר $\varphi(n)$. כאן $\varphi(n)$ זאת פונקצית Euler המוגדרת באופן הבא: $\varphi(n)$ הוא מספר האיברים בקבוצה $\{1,2,3,\dots,n\}$ הזרים ל n. בהינתן פירוק לגורמים ראשוניים שונים, $n=\prod_i p_i^{n_i}$, קיימת זהות:

$\varphi(n)=n\prod_i(1-\frac{1}{p_i})$. ראו wiki: $Euler's\ totient\ function$

(ו) בהרצאה ראינו: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\approx\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. (השלימו את כל השלבים של הוכחה.) הוכיחו את הטענה הכללית הבאה: אם $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ והפירוק שלו לגורמים ראשוניים (זרים) הוא $n=\prod_i p_i^{n_i}$ אז $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,0)\approx\prod_i(\mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z},+,0)$.

(ז) האם קיימת חבורה ציקלית אינסופית שאינה בת מניה?

(ח) יהי $\Bbbk$ שדה, נניח שהחבורה הכפלית שלו, $\Bbbk^\times:=\Bbbk\setminus\{0\}$, ציקלית. הוכיחו: $char(\Bbbk)>0$.

(ט) האם קיימת חבורה ציקלית G כך שעבור כל $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ קיים $a\in G\setminus\{e\}$ כך ש $a^n=e$?

(2) (א) תהי G חבורה מעוצמה לא בת-מניה. האם בהכרח קיים בה איבר מסדר אינסופי?

(ב) יהי V מרחב וקטורי ממימד $n<\infty$. נתבונן באוסף של כל האוטומורפיזמים שלו, $GL_\Bbbk(V)$. הוכיחו שזאת חבורה. בהרצאה זיהינו את החבורה עם $GL_n(\Bbbk)$. השלימו את כל השלבים של ההוכחה.

(ג) יהי $\{H_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף (כלשהו) של תת-חבורות של חבורה G. הוכיחו: $\bigcap_\alpha H_\alpha\le G$.

(ד) הוכיחו שמכפלה ישרה של חבורות אבליות הינה אבלית.

(ה) תהי $S\subset G$ תת קבוצה של חבורה. הוכיחו: $<S>=\bigcap_{S\subseteq H_\alpha<G}H_\alpha$ (כאן החיתוך על כל תתי החבורות המכילות את S).

(ו) מצאו דוגמא לחבורה G ולשתי תת-חבורות $H_1,H_2\lneqq G$ כך ש $H_1\approx H_2$ אבל $H_1\neq H_2$. מצאו גם דוגמא עם $|H_1|=|H_2|$ אבל $H_1\not\approx H_2$.

(ז) האם לכל $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, קיימת חבורה G_n כך שלכל $1<m\le n$ קיים $a\in G_n\setminus\{e\}$ כך ש- $a^m=e$?

(3) (א) לכל $a,b\in\mathbb{R}$ נגדיר העתקה $\mathbb{R}\xrightarrow{T_{a,b}}\mathbb{R}$ ע"י $T_{a,b}(x)=ax+b$. נגדיר $G=\{T_{a,b}|a,b\in\mathbb{R},a\neq 0\}$. הוכיחו ש G הינה חבורה תחת פעולת ההרכבה. ציינו את איבר היחידה ובטאו את האיבר ההופכי. האם חבורה זו הינה אבלית?

(ב) נגדיר $G_\mathbb{Q}=\{T_{a,b}|a\in\mathbb{Q}^\times,b\in\mathbb{R}\}$, $G_1=\{T_{1,b}|b\in\mathbb{R}\}$. הוכיחו: $G_1<G_\mathbb{Q}<G$.

(ג) הוכיחו שלכל $h\in G_\mathbb{Q}$, $g\in G$ מתקיים $ghg^{-1}\in G_Q$. הוכיחו שלכל $h\in G_1$, $g\in G$ מתקיים $ghg^{-1}\in G_1$.

(4) נתבונן בחבורת התמורות $S_n\circlearrowright X$. הגדרה: מחזור (cycle) הינו תמורה מסוג $(x_1\to x_2\to\cdots\to x_k\to x_1)$. (כאן $\{x_i\}$ איברים שונים של X). מחזור כזה יסומן ע"י $(a_1,a_2,\dots,a_k)$ ונגיד שאורכו k. עבור כל איבר $\sigma\in S_n$ נגדיר את התומך שלו (support) ע"י $Supp(\sigma)=\{x\in X|\ \sigma(x)\neq x\}$. נקרא ל $\sigma,\tau\in S_n$ זרים (disjoint) אם $Supp(\sigma)\cap Supp(\tau)=\varnothing$.

(א) הוכיחו: איברים זרים הם מתחלפים. (כלומר, אם $Supp(\sigma)\cap Supp(\tau)=\varnothing$ אז $\sigma\circ\tau=\tau\circ\sigma$.) לכן ניתן לסמן מכפלה של כמה איברים זרים ע"י $\prod_\alpha\sigma_\alpha$.

(ב) בדקו כי הסדר של כל מחזור שווה לאורך שלו.

(ג) הוכיחו: כל תמורה $\tau\in S_n$ הינה מכפלה של מחזורים זרים, $\tau=\prod_\alpha\tau_\alpha$. בטאו את $ord(\tau)$ בעזרת $\{ord(\tau_\alpha)\}$.

(ד) מה הסדר של S_n? כמה מחזורים באורך k ישנם ב S_n?

(ה) רשמו את כל האיברים של S_4.

(ו) ראינו ש S_3 היא חבורת הסימטריות של משולש שווה צלעות. זהו את S_4 כחבורת הסימטריות של פאון ב $\mathbb{R}^3$. (מיהו?)