מבנים אלגבריים. 201.1.7031.

סתיו 2017. (מרצה: דמיטרי קרנר)

תרגיל בית מס' 3.

להגשה עד 23.11.2017. שאלות להגשה: 1, ג,ד' 2,ב,ג; 3,א,ג; 4,ב,ג; 7.

(1) (א) עבור פעולת חבורה $G \circlearrowright X$ בהרצאה הגדרנו Gx, המסלול של $x \in X$.
נגדיר: $x \sim y$ אם $y \in Gx$. בדקו כי זה מגדיר יחס שקילות על X.
(ב) עבור כל $x \in X$ הגדרנו גם את המייצב, $G_x \subseteq G$. האם תמיד מתקיים $G_x \le G$? האם תמיד מתקיים $G_x \trianglelefteq G$?
(ג) יהי $x \in X$ ונניח ש $ord(g) = p$, ראשוני. מה יכול להיות הגודל של קבוצה $\{x, gx, g^2x, \dots\}$?
(ד) יהי $g \in G$ מסדר p- ראשוני ונניח ש $|X| = n$.
הוכיחו: אם $gcd(p, n) = 1$ אז לפעולה $g \circlearrowright X$ יש נקודת שבת. (כלומר קיים $x \in X$ כך ש $gx = x$).
(ה) עבור פעולה $S_n \circlearrowright X_n := \{1, 2, \dots, n\}$ תארו בצורה מפורשת את המייצב של $1 \in X_n$.

(2) (א) יהיו $a, b \in G$, $H < G$ ונניח כי $aH = bH$. האם בהכרח מתקיים $Ha = Hb$?
(ב) בהרצאה הגדרנו את הפעולה הימנית של תת-חבורה על חבורה, $H \circlearrowleft G$, ע"י $(h, g) \to g \cdot h^{-1}$. בדקו שזאת אכן פעולה. האם ההתאמה $(h, g) \to g \cdot h$ הינה גם פעולה? (כלומר מקיימת את כל התנאים של ההגדרה)
(ג) הוכיחו שקיימת התאמה חח"ע ועל בין אוסף המחלקות הימניות של H ב G לבין אוסף המחלקות השמאליות. (זהירות, למה ההעתקה $aH \to Ha$ לא מתאימה?)
(ד) מצאו את כל המחלקות הימניות של תת-החבורה של $GL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ הנוצרת ע"י $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(3) (א) ("משפט Lagrange ההפוך") תהי G סופית ונניח ש- n מחלק את $|G|$. האם ל- G בהכרח יש תת-חבורה מסדר n?
(ב) נניח כי ל- G אין תת-חבורות לא טריוויאליות. מהי G?
(ג) בהרצאה קיבלנו את המשפט הקטן של Fermat כמסקנה ממשפט Lagrange. הוכיחו את משפט Euler (הגירסה המוכללת של Fermat): אם $gcd(a, n) = 1$ אז $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \ mod \ n$. רמז: התבוננו בחבורה $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.
(ד) עבור כל $1 < a \in \mathbb{N}$ הוכיחו: $n | \varphi(a^n - 1)$. רמז: התבוננו בחבורה $\mathbb{Z}/(a^n - 1)\mathbb{Z}$.
(ה) תהי G אבלית עם תת-חבורות: $H_1 < G$, $|H_1| = m_1$, $H_2 < G$, $|H_2| = m_2$. הוכיחו: אם $gcd(m_1, m_2) = 1$ אז $|H_1 \cdot H_2| = m_1 m_2$. מה יכול לקרות כאשר $gcd(m_1, m_2) \neq 1$?

(4) (א) תהי $N \triangleleft G$ ונניח ש $N < H < G$. האם בהכרח $N \triangleleft H$?
(ב) תהי $N \triangleleft H$ ונניח ש $H \triangleleft G$. האם בהכרח $N \triangleleft G$?
(ג) עבור $H < G$ נגדיר $N := \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg$. הוכיחו כי $N \triangleleft G$.
(ד) תהי Q_8 חבורת הקווטרניונים (הגדרנו בהרצאה). לכל איבר $g \in Q_8$ מצאו את הסדר שלו. מיינו את כל תתי-החבורות של Q_8. אילו מהן נורמאליות? האם Q_8 איזומורפית למכפלה ישרה של חבורות?

שאלות חזרה

(5) (א) הגדרה: חילוף (transposition) בחבורה S_n הינו איבר מהצורה (i, j). הוכיחו שכל מחזור (cycle), $g \in S_n$, ניתן להצגה כמכפלה של חילופים. לדוגמה, $(1, 2, 3, 4, 5, 6) = (1, 2)(1, 3)(1, 4)(1, 5)(1, 6)$.
(ב) הוכיחו שכל תמורה ניתנת להצגה כמכפלה של חילופים. (תזכורת: כל תמורה מתפרקת למכפלה של מחזורים זרים)
(ג) נקבע $\sigma \in S_n$ ומחזור כלשהו $(k_1, \dots, k_m) \in S_n$. הוכיחו: $\sigma^{-1}(k_1, \dots, k_m)\sigma = (\sigma(k_1), \dots, \sigma(k_m))$.
הסיקו מכאן איך הצמדה ע"י σ פועלת על איבר כללי ב- S_n.

(6) נקבע $n > 2$. נסמן ב- a את השיקוף של $\mathbb{R}^2$ ביחס לציר ה-y, כלומר $a(x, y) = (-x, y)$. נסמן ב- b את סיבוב המישור נגד כיוון השעון בזווית $\theta = \frac{2\pi}{n}$, כלומר $b\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. נגדיר $D_{2n} = < a, b >$, עם פעולת ההרכבה.
(א) בדקו ש $a^2 = b^n = Id$, העתקת הזהות על $\mathbb{R}^2$. בדקו ש $ab = b^{-1}a$.
(ב) הוכיחו ש- D_{2n} הינה חבורה לא אבלית והסדר שלה הוא $2n$. חבורה זו נקראת החבורה הדיהדרלית מסדר $2n$.
(ג) הוכיחו: $D_6 \approx S_3$. (ניתן להוכיח בצורה אלגברית. התוכלו לתת הוכחה גאומטרית קצרה?)

(7) יהא F שדה סופי בעל q איברים. מצאו את הסדר של $GL_n(F)$ ושל $SL_n(F)$.