מבנים אלגבריים. 201.1.7031.

סתיו 2017. (מרצה: דמיטרי קרנר)

תרגיל בית מס' 4.

להגשה עד 30.11.2017. שאלות להגשה: 1 א, ב,ג. 2 א,ב. 3 ג,ד. 5 א. 7 א,ב,ג,ד,ה.

(1) (א) בכל אחד מהמקרים הבאים הראו כי התת-חבורה היא נורמלית והדגימו איזומורפיזם מפורש בין החבורות.

i. $G_1\times\{e\}\lhd G_1\times G_2$, $G_1\times G_2/G_1\times\{e\} \xrightarrow{\sim} G_2$.
ii. $\mathbb{Z}\lhd\mathbb{R}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\xrightarrow{\sim} S^1$.
iii. $\mathbb{Z}^2\lhd\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\sim} S^1\times S^1$.
iv. $SL_n(\Bbbk)\lhd GL_n(\Bbbk)$, $GL_n(\Bbbk)/SL_n(\Bbbk)\xrightarrow{\sim}\Bbbk^\times$. (התוכלו לתת כאן פירוש/תאור גאומטרי?)
v. $SO_n(\Bbbk)\lhd O_n(\Bbbk)$, $O_n(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R})\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
vi. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\lhd D_{2n}$, $D_{2n}/\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
vii. $N=\{1\!\!1,(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}\lhd S_4$, $S_4/N\xrightarrow{\sim}S_3$.

(רמז: עבור פירוק למחזורים זרים, $\tau=\prod\tau_\alpha$, כמו בת"ב.2, מתקיים: $g\tau g^{-1}=\prod(g\tau_\alpha g^{-1})$.)

(ב) תהי $H<G$ ונניח כי $|G|:|H|=2$. הוכיחו כי $H\lhd G$. זהו את G/H.

(ג) בהרצאה ראינו כי: $\mathbb{R}^2/SO_2(\mathbb{R})\approx\mathbb{R}_{\ge0}$ (כקבוצות). בנוסף, עבור תת-קבוצה $\mathbb{R}_{>0}\subset\mathbb{R}_{\ge0}$ (שהיא חבורה ביחס לכפל) מתקיים: $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)/SO_2(\mathbb{R})\approx\mathbb{R}_{>0}$. התוכלו להגדיר פעולת כפל על $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$ כך ש $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)/SO_2(\mathbb{R})\approx\mathbb{R}_{>0}$ יהיה איזומורפיזם בין חבורות?

(2) (א) אילו מהחבורות הבאות הינן פשוטות: S_3, S_4, D_{2n}? (ניתן להשתמש בהגדרה הגאומטרית של D_{2n})

(ב) תהי G חבורה מסדר 62. הוכיחו כי G אינה פשוטה.

(3) *חבורת הקומוטטור* של G היא תת-חבורה $[G,G]$ הנוצרת ע"י כל הביטויים מהצורה $[x,y]:=x^{-1}y^{-1}xy$, עבור כל $x,y\in G$.

(א) מהי $[S_3,S_3]$?

(ב) הוכיחו: $[G,G]\trianglelefteq G$, וחבורת המנה $G/[G,G]$ הינה אבלית.

(ג) הוכיחו: אם $N\lhd G$ ו- G/N אבלית אזי $[G,G]\le N$. (כלומר, $[G,G]$ זאת החבורה הקטנה ביותר עם התכונה הזאת.)

(ד) הוכיחו: אם $H\le G$ היא תת חבורה של G כך ש-$[G,G]\le H$ אזי $H\trianglelefteq G$.

שאלות חזרה

(4) (א) מיינו את כל החבורות מסדר 6, עד כדי איזומורפיזם.

(ב) חבורה G נקראת *מרובעת* אם כל תת-חבורה לא טריוויאלית $H<G$ הינה מאינדקס 2. מצאו את כל החבורות המרובעות.

(5) (א) תהיינה $N_1,N_2\lhd G$ כך ש $N_1\cap N_2=\{e\}$. הוכיחו כי לכל $g_1\in N_1$, $g_2\in N_2$ מתקיים $g_1g_2=g_2g_1$.

(ב) תהיינה $N_1,N_2\lhd G$. הוכיחו: $N_1\cdot N_2\le G$. האם זאת בהכרח תת-חבורה נורמאלית?

(6) חבורה G נקראת *המילטונית* אם G איננה אבלית, אך כל תת-חבורה שלה הינה נורמאלית.

(א) האם D_{2n}, Q_8, S_n חבורות המילטוניות? (עבור אילו n?)

(ב) תהי G חבורה המילטונית. הוכיחו שלכל $a,b\in G$ קיים $j\in\mathbb{Z}$ כך ש $ab=b^ja$.

(7) תהא G חבורה. לכל $x,g\in G$ נגדיר $x^g:=g^{-1}xg$. עבור תת-קבוצה כלשהי $S\subseteq G$ נגדיר $S^g:=\{x^g|x\in S\}$.

(א) הוכיחו כי $N_G(S):=\{g\in G|S^g=S\}$ הינה תת-חבורה של G. (היא נקראת *המנרמל* של S ב- G.)
הוכיחו כי: $\langle S\rangle\trianglelefteq N_G(S)$. הוכיחו כי $N_G(S)$ הינה תת-חבורה הגדולה ביותר ב G עם התכונה הזאת.

(ב) הוכיחו כי $C_G(S):=\{g\in G|\forall s\in S, s^g=s\}$ הינה תת-חבורה של G. (היא נקראת *המרכז* של S ב- G).
האם עבור כל $g\in G$ מתקיים $C_G(g^{-1}Sg)=g^{-1}C_G(S)g$?

(ג) הוכיחו כי $Z(G):=\{g\in G|\forall h\in G, gh=hg\}$ הינה תת-חבורה נורמאלית של G. (היא נקראת *המרכז* של G. הסימון בגלל מילה Zentrum.) בנוסף, הוכיחו כי $Z(G)=C_G(G)$.

(ד) מצאו/תארו את המרכז של $GL_n(\Bbbk)$.

(ה) נניח שחבורה $G/Z(G)$ הינה ציקלית. הוכיחו ש- G אבלית.

(ו) הוכיחו ש- $C_G(S)$ הינה תת-חבורה נורמאלית של $N_G(S)$.

(ז) מצאו את $C_{GL_2(\mathbb{R})}(A)$ עבור $A=\begin{pmatrix}3&4\\0&2\end{pmatrix}$.

(8) תהיינה $H,K<G$. הוכיחו: $H\cdot K<G$ אם"ם $HK=KH$.

(9) תהי $G=\{e,a_1,\dots,a_n\}$ חבורה אבלית. נגדיר: $x=a_1a_2\cdots a_n$. הוכיחו:

(א) אם n זוגי אז $x=e$.

(ב) אם ב G יש בדיוק איבר אחד מסדר 2, אז האיבר הוא x.

(ג) אם ב G יש יותר מאיבר אחד מסדר 2, אז $x=e$.

(10) הוכיחו כי חבורות הבאות אינן איזומורפיות: $(\mathbb{C}^\times,\cdot,1)$; $(\mathbb{R}^\times,\cdot,1)$; $(\mathbb{Q}^\times,\cdot,1)$; $(\mathbb{Q},+,0)$; $(\mathbb{Z},+,0)$; S_4; D_{24}.