מבנים אלגבריים. 201.1.7031.

סתיו 2017. (מרצה: דמיטרי קרנר)

תרגיל בית מס' 5.

להגשה עד 7.12.2017. שאלות להגשה: 1 ג,ה. 3 ג,ד. 4 ב,ג. 5 ב. 6 א,ו. 8. 9ג.

(1) יהי $G \xrightarrow{\phi} H$ הומומורפיזם של חבורות.
(א) הוכיחו: $\phi(x^n) = \phi(x)^n$, עבור כל $n \in \mathbb{Z}$, ובפרט: $\phi(\mathbb{I}_G) = \mathbb{I}_H$.
(ב) הוכיחו: ϕ חח"ע אם"ם $ker(\phi) = \{\mathbb{I}_G\}$. הוכיחו: ϕ הינו על אם"ם $Im(\phi) = G$.
(ג) הוכיחו: אם $ord_G(g) < \infty$ אזי $ord_H(\phi(g))$ מחלק את $ord_G(g)$.
(ד) נניח בנוסף ש- ϕ הינו איזומורפיזם. הוכיחו: $ord_H(\phi(g)) = ord_G(g)$.
(ה) תהי $N \trianglelefteq G$ ויהי $g \in G$ מסדר סופי. הוכיחו: $ord_{G/N}(gN) | ord_G(g)$.

(2) בדקו שהעתקה $\Bbbk \to GL_2(\Bbbk)$, $a \to \begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ הינה הומומורפיזם חח"ע. מצאו את המנרמל של התמונה.

(3) נקבע הומומורפיזם של חבורות, $G \xrightarrow{\phi} H$. הוכיחו את המשפט הרביעי של הומומורפיזמים:
(א) עבור $ker(\phi) \le A, B \le G$ מתקיים: $A \le B$ אם"ם $\phi(A) \le \phi(B)$. (למה צריכים כאן $ker(\phi) \le A, B$?)
(ב) אם $ker(\phi) \le A \le B \le G$ אז $|B : A| = |\phi(B) : \phi(A)|$.
(ג) עבור כל $A, B \le G$ מתקיים $\phi(\langle A, B\rangle) = \langle \phi(A), \phi(B)\rangle$. האם מתקיים גם $\phi(A \cap B) = \phi(A) \cap \phi(B)$?
(ד) $N \lhd \phi(G)$ אם"ם $\phi^{-1}(N) \lhd G$. (האם מתקיים גם $N \lhd H$?) האם תמיד מתקיים: $\phi(K) \lhd \phi(G)$ אם"ם $K \lhd G$?

(4) תהי G חבורה אבלית (סופית או אינסופית). נסמן $\mathrm{Tor(G)} = \{\mathrm{g} \in \mathrm{G} | \exists \mathrm{n} > 0 : \mathrm{g}^{\mathrm{n}} = \mathrm{e}\}$. בדקו כי $\mathrm{Tor(G)} \le \mathrm{G}$.
(א) הוכיחו: $\mathrm{Tor}(G/_{\mathrm{Tor(G)}}) = \{\mathrm{e}\}$. (תנו ניסוח מילולי לטענה הזאת)
(ב) הוכיחו כי $\mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} Tor(S^1)$, ובנוסף כי $\mathbb{R}/_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} S^1/_{Tor(S^1)}$.
(ג) האם עבור G לא אבלית $\mathrm{Tor(G)}$ היא גם תת-חבורה?

(5) תהי G חבורה ונגדיר את העתקת "אלכסון" $G \xrightarrow{\phi} G \times G$ ע"י $\phi(g) = (g, g)$.
(א) בדקו ש ϕ הינו הומומורפיזם חח"ע.
(ב) מצאו את המנרמל של $\phi(G)$ ב $G \times G$. מצאו התנאי הכרחי ומספיק כך ש $\phi(G) \trianglelefteq G \times G$?
(ג) הוכיחו: $N_{G \times G}(\phi(G)) = \phi(G)$ (המנרמל) אם ורק אם $Z(G) = \{e\}$ (המרכז של G).

(6) (א) הוכיחו: אם $|G| = pq$, כאשר $p < q$ הינם ראשוניים, אז $\mathbb{Z}/_{q\mathbb{Z}} \lhd G$ ו $G/\mathbb{Z}/_{q\mathbb{Z}} \approx \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$. (ראינו בהרצאה)
(ב) הוכיחו: אם בנוסף מתקיים $p \nmid (q-1)$ אז $G \approx \mathbb{Z}/_{pq\mathbb{Z}}$.
(אם אתם מתקשים, ניתן להיעזר בעמוד 91 של ספר של Herstein)
(ג) הוכיחו שכל שתי חבורות לא אבליות מגודל 21 הינן איזומורפיות.
(ד) יהיו $q > p$ ראשוניים כך שמתקיים $p | (q-1)$. הוכיחו שקיימת חבורה לא אבלית מסדר pq. בנוסף הוכיחו שכל שתי חבורות כאלו הינן איזומורפיות. (אם אתם מתקשים, ראו רמז בעמוד 92, של ספר של Herstein)
(ה) חבורה G נקראת metabelian אם קיימת $N \lhd G$ אבלית כך שגם $G/_N$ אבלית. הראו כי כל חבורה מסדר pq, עם $p \neq q$ ראשוניים, הינה metabelian. הוכיחו: כל תת-חבורה של metabelian הינה metabelian .
(ו) תהי G חבורה לא אבלית כך ש- $|G| = 2p$, עבור $p > 2$ ראשוני. הוכיחו: $G \approx D_{2p}$ (החבורה הדיהדרלית).

<u>שאלות חזרה</u>

(7) (א) תהיינה $N \lhd G$, נניח כי $|N|$ הינו אי-זוגי ו $|G/_N| = 2^m$, $m \ge 1$.
הוכיחו: N היא בדיוק קבוצת האיברים מסדר אי-זוגי ב G.
(ב) יהיו $a, b \in G$ כאשר $ord(a) = n_a$, $ord(b) = n_b$, $gcd(n_a, n_b) = 1$. נניח גם כי $ab = ba$.
הוכיחו: $ord(ab) = n_a n_b$.

(8) יהי $\mathbb{F}_2$ שדה עם שני איברים. הוכיחו: $GL_2(\mathbb{F}_2) \approx S_3$. (ניתן להוכיח זאת ע"י חישוב, אך דרך קצרה יותר - לזהות את $GL_2(\mathbb{F}_2)$ כחבורת סימטריות של מסלול שלה במרחב וקטורי $\mathbb{F}_2^{\oplus 2}$.)

(9) (א) תהיינה $H, K < G$ ונניח כי $|H| = m$, $|K| = n$ כאשר $gcd(m, n) = 1$. הוכיחו: $H \cap K = \{e\}$.
(ב) תהיינה $H_1, H_2 < G$, תת-חבורות, ונניח כי $G = H_1 \cdot H_2$ (כקבוצות). האם בהכרח מתקיים $G \approx H_1 \times H_2$?
(ג) נניח שבנוסף מתקיים: $|G| = |H_1| \cdot |H_2| < \infty$. האם זה מבטיח כי $G \approx H_1 \times H_2$?
(ד) תהי G חבורה סופית ותהיינה $\{N_i\} \lhd G$ כך ש $G = N_1 \cdots N_k$ וגם $|G| = |N_1| \cdots |N_k|$. הוכיחו: $G \approx \prod N_i$.