מבנים אלגבריים. 201.1.7031.

סתיו 2017. (מרצה: דמיטרי קרנר)

תרגיל בית מס' 6.

להגשה עד 12.12.2017. שאלות להגשה: 1 ה, ח, ט. 2 ד, ז. 3 א, ו, ז.

(1) (א) הגרעין של פעולה $G \circlearrowright X$ הינו אוסף של כל איברי G הפועלים על X כהעתקת הזהות. הוכיחו שגרעין של פעולה הינו תת-חבורה נורמאלית ב G.

(ב) הוכיחו שהעתקת הצמדה בחבורה הינה פעולה. זהו את הגרעין שלה.

(ג) בדקו שסדר של כל איבר בחבורה נשמר תחת הצמדה. בדקו שכל הצמדה פועלת על תת חבורות (כלומר שולחת תת חבורה לתת חבורה). הוכיחו: $H<G$ הינה תת-חבורה נורמאלית אם"ם כל הצמדה שולחת את H לעצמה.

(ד) ראינו (ת.ב. 2) שכל איבר ב- S_n הינו מכפלה של מחזורים זרים, $\prod \sigma_\alpha$. בדקו: $g(\prod \sigma_\alpha)g^{-1} = \prod (g\sigma_\alpha g^{-1})$. בפרט אורכי כל המחזורים בפירוק נשמרים.

(ה) נגדיר $X_k \subset S_n$ כתת-קבוצה של כל האיברים שהם מחזורים באורך k. עבור אילו k זאת תת-חבורה? תארו את מחלקת הצמידות של X_k. הסיקו: $\langle X_k \rangle \trianglelefteq S_n$.

(ו) מצאו את כל מחלקות הצמידות של איברים ב S_4. וודאו את משוואת המחלקות עבור S_4. עבור כל איבר $g \in S_4$ קבעו את סדר המרכז שלו ב S_4.

(ז) מיינו את כל תת-חבורות נורמליות של S_4.

(ח) תארו את מחלקות צמידות של איברים ב $GL_2(\mathbb{C})$. (ניתן להשתמש בחומר של אלגברה 2)

(ט) נקבע $H<G$. איך ההצמדה פועלת על המנרמל $N_G(H)$?

(י) עבור כל תת-קבוצה $S \subset G$ ניקח את אוסף כל הקבוצות הצמודות, $S^G := \{g^{-1}Sg|\ g \in G\}$. עבור כל איבר $h \in G$ נגדיר והתאמה $S^G \xrightarrow{\phi_h} S^G$, ע"י $g^{-1}Sg \to (gh)^{-1}Sgh$. בדקו ש ϕ_h הינה פעולה, והתאמה זאת מגדירה הומומורפיזם $G \to Sym(S^G)$. האם ההומומורפיזם הינו חח"ע? על?

(2) *אוטומורפיזם* של G (automorphism) זה איזומורפיזם של חבורה לעצמה.

(א) נקבע $g \in G$ ונתבונן בפעולות $G \circlearrowright G$ המוגדרות ע"י $(g,x) \to gx$; $(g,x) \to xg^{-1}$; $(g,x) \to gxg^{-1}$. אילו מהן אוטומורפיזמים?

(ב) מתי העתקה $G \ni g \to g^{-1} \in G$ הינה אוטומורפיזם?

(ג) נניח כי $|G|>2$. הוכיחו כי ל G קיים אוטומורפיזם לא טריוויאלי.

(ד) נניח כי לחבורה סופית קיים אוטומורפיזם, $\phi \circlearrowright G$, עם נקודת שבת אחת בלבד, כלומר: $\phi(x)=x$ אם"ם $x=e$. נניח בנוסף כי $\phi^2 = Id$. הוכיחו כי G אבלית.
(רמז: הוכיחו כי כל איבר של G ניתן להצגה כ $\phi(x)x^{-1}$. הסיקו מכאן כי $\phi(g)=g^{-1}$ עבור כל $g \in G$.)

(ה) תהי G חבורה סופית ונניח שאוטומורפיזם $\phi \circlearrowright G$ שולח יותר מ $\frac{3}{4}$ איברי G להופכי שלהם. הוכיחו: $\phi(g)=g^{-1}$ עבור כל $g \in G$.

(ו) הוכיחו שאוסף האוטומורפיזמים של חבורה הינו גם חבורה (ביחס להרכבת העתקות). הסימון לחבורה זו: $Aut(G)$.

(ז) חשבו/זהו: $Aut(\mathbb{Z})$, $Aut(\mathbb{Z}_n)$, $Aut(S_3)$.

(3) (א) תהא G חבורה מסדר 36. הוכיחו שקיימת $N \triangleleft G$ מסדר 3 או מסדר 9.

(ב) יהיו $p<q<r$ ראשוניים. הוכיחו שכל חבורה מסדר pqr איננה פשוטה.

(ג) הוכיחו: אם $|G|=p^n$ ו- $H \lneq G$ אז $H \lneq N_G(H)$ (המנרמל של H). הדרכה: ודאו שצריכים לבדוק רק את המקרה $Z(G) \le H$. עברו לחבורות המנה, $\bar{H} := H/Z(G) \lneq G/Z(G) =: \bar{G}$. קבלו: $\bar{H} \lneq N_{\bar{G}}(\bar{H})$. הפעילו אינדוקציה.

(ד) יהי p ראשוני ונניח כי $|G|=p^2$. הוכיחו ש-G אבלית. הכללה: אם $|G|=p^n$ ו $|Z(G)|=p^{n-1}$ אז G אבלית.

(ה) הוכיחו שכל חבורה מסדר 99 היא אבלית. (הוכיחו את קיומה של תת-חבורה נורמאלית, לא טריוויאלית)

(ו) תהא G חבורה סופית, $n=|G|$, $H \le G$. נסמן $[G:H]=k$. נניח ש $n \nmid k!$. הוכיחו שקיימת $\{e\} \neq N \trianglelefteq G$ כך ש $N \le H$. הדרכה: התבוננו בהעתקה $G \xrightarrow{\phi} Sym(G/H)$ המוגדרת ע"י $\phi(g) := \phi_g$ כאשר $\phi_g(aH)=gaH$. בדקו ש $ker(\phi) \le H$ וש $ker(\phi) \neq \{e\}$.

(ז) נסמן ב $Syl_p(G)$ את קבוצת חבורות p-סילו של G. הוכיחו שאם $P \in Syl_p(G)$ ו- $H \le G$ כך ש $P \le H$ אזי $P \in Syl_p(H)$. הראו שהכיוון ההפוך לא בהכרח נכון, כלומר תנו דוגמא לזוג $H<G$ כך שקיימת $P \in Syl_p(H)$ המקיימת: $P \notin Syl_p(G)$.