מבנים אלגבריים. 201.1.7031.

סתיו 2017. (מרצה: דמיטרי קרנר)

תרגיל בית מס' 7.

להגשה עד 24.12.2017. שאלות להגשה: 1.ז. 2.ב,ה. 3. 5.ב,ג,ד. 7.א,ב.

(1) עבור כל איבר $\sigma \in S_n$ ניקח פירוק שלו למחזורים זרים, $\sigma = \prod_{i=1}^{k} \sigma_i$,
ונתאים לו את *החלוקה* $n = ord(\sigma_1) + \cdots + ord(\sigma_k)$, כמו שעשינו בהרצאה.

(א) יהי $\sigma \in S_n$ מחזור באורך $k \cdot l$. הוכיחו: σ^k הינו מכפלה של מחזורים (זרים) באורך l.

(ב) האם אוסף של איברים עם חלוקה נתונה מהווה תת-חבורה? תת-חבורה נורמאלית?

(ג) תארו את מחלקות הצמידות של איברים $(1,2,\ldots,n)$; $(1,2)$ ב S_n.

(ד) הוכיחו: שני איברים של S_n הינם צמודים אם"ם החלוקות שלהם שוות.
בפרט: איברים צמודים למחזור הם בהכרח מחזורים, איברים צמודים לחילוף הם בהכרח חילופים.

(ה) מצאו את הסדר הגדול ביותר של איבר ב S_7, S_{12}. (עבור מקרה כללי ראו $wiki$: $Landau's\ function$.)

(ו) יהיו $m < n$ ונקבע שיכון $S_m < S_n$ ע"י הכלל: S_m פועלת על תת-קבוצה $\{1,\ldots,m\} \subset \{1,\ldots,n\}$. אז, עבור כל איבר של S_m ניתן לקחת פירוק למחזורים זרים ביחס ל- S_m או ל- S_n. בדקו כי שני הפירוקים זהים.
ובפרט: סדר וזוגיות ביחס ל- S_m או ל- S_n זהים.

(ז) הוכיחו ש- S_n נוצרת ע"י כל החילופים, כלומר $S_n = \langle \{(ij)\}_{i<j} \rangle$.

(ח) הוכיחו ש- S_n נוצרת ע"י שני איברים, $\sigma = (1,2,\ldots,n)$, $\tau = (1,2)$.

(2) (א) נקבע בסיס סטנדרטי ב- $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = \{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n\}$. לכל איבר $\sigma \in S_n$ נתאים אופרטור לינארי, השולח $\hat{x}_i$ ל $\hat{x}_{\sigma(i)}$,
(עבור כל i.) בדקו שזה מגדיר הומומורפיזם חח"ע $S_n \xrightarrow{\phi} GL_n(\mathbb{R})$. תארו את התמונה בצורה מפורשת ככל האפשר.

(ב) הוכיחו: תת-חבורה $A_n \triangleleft S_n$ הינה איזומורפית ל $\phi(S_n) \cap SL_n(\mathbb{R})$.

(ג) נקבע $\sigma \in S_n$ ונציג אותו כמכפלה של חילופים של S_n (כמו בשאלה 1.ז'). הוכיחו: זוגיות של מספר החילופים לא תלויה בהצגה.

(ד) הוכיחו ש- A_n נוצרת ע"י מחזורים באורך 3, כלומר $A_n = \langle \{(ijk)\}_{i<j<k} \rangle$.

(ה) הראו שאם $G \le S_n$ מכילה תמורה אי-זוגית, אזי יש ל-G תת חבורה נורמלית מאינדקס 2.

(ו) בהרצאה הוצהר (ללא הוכחה) שחבורה $A_{n\ge 5}$ הינה פשוטה. ישנן הרבה הוכחות לכך, למשל:
$math.stackexchange.com/questions/15773/simplicity\text{–}of\text{–}a\text{–}n$. בחרו את הגרסה האהובה עליהם.

(3) מצאו סדרת הרכב עבור $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, Q_8, D_{2n}, S_n.

<u>שאלות חזרה</u>

(4) יהא $\Bbbk$ שדה ממציין שונה מ- 2. נסמן $G = (\Bbbk[x], +, 0)$. נגדיר $G \xrightarrow{\phi} G$ ע"י: $\phi(p(x)) = \frac{p(x)+p(-x)}{2}$.

(א) הוכיחו ש ϕ הינו הומומורפיזם ומצאו את $\ker(\phi)$ ואת $Im(\phi)$.

(ב) הוכיחו ש $\ker(\phi) \approx G$ וגם $G \approx Im(\phi)$. (זאת דוגמא למקרה: $N \triangleleft G$, $G/N \approx G \approx N$.)

(5) נגדיר פעולה $G := S_4 \circlearrowright \Bbbk[x_1,x_2,x_3,x_4]$ ע"י תמורת האינדקסים, $\sigma(f(x_1,\ldots,x_4)) = f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(4)})$.
(בדקו שזאת אכן פעולה)

(א) מצאו את G_{x_1} והראו ש $G_{x_1} \approx S_3$. חשבו את המסלול Gx_1.

(ב) מצאו את $G_{x_1+x_2}$ והראו שזו חבורה אבלית מסדר 4. חשבו את המסלול $G(x_1+x_2)$.

(ג) מצאו את $G_{x_1x_2+x_3x_4}$ והראו ש $G_{x_1x_2+x_3x_4} \approx D_8$. חשבו את המסלול $G(x_1x_2+x_3x_4)$.

(ד) מצאו את $G_{(x_1+x_2)(x_3+x_4)}$ ובדקו ש $G_{x_1x_2+x_3x_4} = G_{(x_1+x_2)(x_3+x_4)}$. חשבו את המסלול $G(x_1+x_2)(x_3+x_4)$.

(6) תהי G מכפלה ישרה פנימית של $H_1, H_2, \ldots, H_k$, כלומר: $\{H_i \trianglelefteq G\}$, $H_i \cap H_j = \{e\}$, $G = H_1 \cdots H_k$. הראו:

(א) אם $N \trianglelefteq H_i$, עבור i מסוים, אזי $N \trianglelefteq G$.

(ב) אם $\{N_i \trianglelefteq H_i\}_{i=1..k}$, אזי $N = N_1 \cdot N_2 \cdots N_k$ היא מכפלה ישרה של $N_1, N_2, \ldots, N_k$, ומתקיים $N \trianglelefteq G$.

(ג) $G/N \cong (H_1/N_1) \times (H_2/N_2) \times \cdots \times (H_k/N_k)$ עבור N מסעיף (ב).

(7) (א) המשפט היסודי של אלגברה אומר: למשוואה פולינומיאלית מדרגה n ישנן בדיוק n פתרונות מעל $\mathbb{C}$ (כולל ריבוי).
תנו דוגמא של חבורה (גדולה ככל האפשר) שבה כל איבר הינו פתרון של משוואה $x^2 = e$.

(ב) תהי G חבורה כלשהי ו- H חבורה אבלית. הוכיחו שכל הומומורפיזם $G \xrightarrow{\phi} H$ מתפרק להרכבה $G \xrightarrow{\pi} G/[G,G] \xrightarrow{j} H$,
כאשר π הטלה קנונית ו- j מוגדר בצורה יחידה.