מבנים אלגבריים. 201.1.7031.

סתיו 2017. (מרצה: דמיטרי קרנר)

תרגיל בית מס' 8.

להגשה עד 31.12.2017. שאלות להגשה: 1 ב. 2 א, ג, ה. 3 ב, ג. 5 ב, ג, ו. 6.

(1) (א) בדקו שבכל חוג מתקיים: $a\cdot 0=0=0\cdot a$, $a(-b)=-(ab)=a(-b)$, $(a+b)^2=a^2+ab+ba+b^2$.

(ב) יהא R חוג עם יחידה ו- $S\subseteq R$ תת-חוג ($1_R=1_S$). האם כל איבר הפיך ב- S הפיך גם ב- R? ולהיפך?

(ג) הוכיחו שתת-קבוצה $S\subset R$ הינה תת-חוג אם עבור כל $a,b\in S$ מתקיים: $a-b\in S$ וגם $a\cdot b\in S$.

(ד) נתונה קבוצה עם פעולות $\{R,\cdot,+,1_R,0_R\}$ כך שמתקיים: i. $\{R,+,0_R\}$ חבורה. ii. $\{R,\cdot,1_R\}$ חבורה למחצה עם 1_R איבר יחידה. iii. כלל הפילוג: $\forall a,b,c\in R:\ \ a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,\ (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$
הוכיחו כי R הינו חוג, כלומר הוכיחו את קומוטטיביות החיבור.

(2) אילו מהקבוצות הבאות הינן חוגים (ביחס לחיבור וכפל הרגילים של פונקציות)? אילו מהם תחומי שלמות?

(א) $V_d:=\{$פולינומים מעל שדה $\mathbb{k}$ מדרגה קטנה ושווה מ- $d\}$

(ב) $C^r(a,b)=\{$פונקציות גזירות r-פעמים ברציפות בקטע (a,b)$\}$. כאן $0\le r\le\infty$.

(ג) $C^r(\mathbb{R},0)=\{$פונקציות גזירות r-פעמים ברציפות בסביבות (פתוחות) של 0$\}$. (לכל פונקציה הסביבה משלה)

(ד) $\mathbb{R}\{x\}$ (אוסף של טורים מתכנסים בסביבות של 0. לכל טור תחום התכנסות משלו.)

(ה) (קבוצת כל הפונקציות $\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ שעבורן $|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx|<\infty$.)

(3) (א) נקבע חוג עם אידאלים, $I,J\subset R$. הוכיחו כי $I+J$, $I\cap J$, $I\cdot J$ הינם אידאלים. וכי $I\cdot J\subseteq I\cap J$. (תנו דוגמאות עם $I\cdot J\subsetneq I\cap J$ ו $I\cdot J=I\cap J$.)
כאן: $I+J:=\{a+b|\ a\in I,\ j\in J\}$ $\qquad I\cdot J:=\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\cdot b_k|\ a\in I,\ j\in J,\ k\in\mathbb{N}\}$.

(ב) נניח בנוסף כי R חוג קומוטטיבי עם יחידה וכי $I+J=R$ (במקרה זה נאמר ש-I,J הם קו-מקסימליים). הראו ש $IJ=I\cap J$.

(ג) יהא R חוג עם יחידה. נסמן ב- $Mat_{n\times n}(R)$ את חוג המטריצות בגודל $n\times n$ מעל R. הראו שכל אידאל $I\subset M_n(R)$ הינו מהצורה $Mat_{n\times n}(J)$ כאשר $J\subset R$ הינו אידאל. (כאן כל האידאלים דו-צדדיים).

(4) יהי $R\xrightarrow{\phi}S$ הומומורפיזם של חוגים. בדקו: $ker(\phi)\subseteq R$ הינו אידאל (דו-צדדי), $Im(\phi)\subseteq S$ הינה תת-חוג.

(א) נניח ש R,S חוגים עם יחידה. בדקו: $\phi(1_R)$ הוא או 1_S או מחלק אפס.
הסיקו: אם S תחום שלמות ו $\phi(R)\neq 0$, אזי $\phi(1_R)=1_S$.

(ב) הוכיחו: אם $R\xrightarrow{\phi}S$ אפימורפיזם של חוגים אזי $\phi(Z(R))\subseteq Z(S)$. (המרכז של חוג)

(ג) עבור כל אידאל $I\subset R$ בהרצאה הגדרנו חוג מנה, R/I. בדקו שפעולות חיבור וכפל מוגדרות היטב ו- R/I אכן חוג.
נניח ש- R קומוטטיבי/חוג עם יחידה/תחום שלמות, האם התכונה עוברת ל R/I? ולהיפך?

(ד) עבור כל איבר של $C^\infty(\mathbb{R},0)$ ניקח פיתוח Taylor עד סדר n. הראו שזה מגדיר הומומורפיזם של חוגים. זהו את הגרעין והתמונה.

(ה) עבור כל איבר של $C^\infty(\mathbb{R},0)$ ניקח פיתוח Taylor מלא. הראו שזה מגדיר הומומורפיזם $C^\infty(\mathbb{R},0)\overset{Taylor}{\to}\mathbb{R}[[x]]$.
זהו את הגרעין. (למה של Borel אומרת במקרה זה: ההומומורפיזם הינו על.)

(5) חוג קווטרניונים (של Hamilton) $\mathbb{H}=Span_{\mathbb{R}}(1,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ מוגדר כמרחב וקטורי עם מכפלה המושרית מחבורת קווטרניונים, $Q_8=\{\pm1,\pm\mathbf{i},\pm\mathbf{j},\pm\mathbf{k}\}$.

(א) נגדיר צמוד של $q=a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}\in\mathbb{H}$ ע"י $\bar{q}=a-b\mathbf{i}-c\mathbf{j}-d\mathbf{k}$. (ודאו שזהו אכן צמוד, כלומר: העתקה $q\to\bar{q}$ הינה $\mathbb{R}$-לינארית ו $\bar{\bar{q}}=q$.) בדקו את התכונות:
i. $\overline{q_1\cdot q_2}=\overline{q_2}\cdot\overline{q_1}$. ii. $\bar{q}\cdot q\in\mathbb{R}_{\ge 0}$. (מתי מתקיים $\bar{q}\cdot q=0$?) iii. $\bar{q}=-\frac{1}{2}(q+\mathbf{i}q\mathbf{i}+\mathbf{j}q\mathbf{j}+\mathbf{k}q\mathbf{k})$.

(ב) הסיקו: $\mathbb{H}^\times=\mathbb{H}\setminus\{0\}$. (חוג שבו כל איבר שלא אפס הינו הפיך נקרא "חוג עם חילוק")

(ג) נגדיר נורמה: $||q||=\sqrt{q\cdot\bar{q}}$ (בדקו שזאת אכן נורמה). עבור כל $q_1,q_2\in\mathbb{H}$ הראו: $||q_1\cdot q_2||=||q_1||\cdot||q_2||$.

(ד) הסיקו את זהות של Lagrange : עבור כל $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\in\mathbb{Z}$ קיימים $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4\in\mathbb{Z}$ כך ש $(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+\beta_4^2)=\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2+\gamma_4^2$.

(ה) נגדיר העתקה $\mathbb{H}\xrightarrow{\phi}Mat_{2\times2}(\mathbb{C})$ ע"י $a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}\to\begin{bmatrix}a+b\mathbf{i}&c+d\mathbf{i}\\-c+d\mathbf{i}&a-b\mathbf{i}\end{bmatrix}$. בדקו שזהו הומומורפיזם חח"ע של חוגים. זהו את התמונה.

(ו) כמה פתרונות למשוואה $x^2=-1$ קיימים ב $\mathbb{H}$?

(6) יהא R תחום שלמות. הוכיחו כי אם $x\in R$ מקיים $x^2=1_R$ אזי $x=\pm 1_R$.