מבנים אלגבריים. 201.1.7031.

סתיו 2017. (מרצה: דמיטרי קרנר)

תרגיל בית מס' 9.

להגשה עד 7.01.2018. שאלות להגשה: 1 ב. 2 ג. 3 א,ב,ד. 4 ב. 5 א. 7.

(1) (א) נניח שבחוג מתקיים: $x^2 = 1_R$ עבור כל $x \in R$. הראו ש- R חוג קומוטטיבי.
(ב) הוכיחו שכל תחום שלמות סופי הינו שדה.
(ג) תהי $X \neq \varnothing$ קבוצה ו- $P(X)$ קבוצת החזקה. הגדירו פעולות חיבור וכפל, $\oplus$, $\otimes$, על $P(X)$ כך ש $(P(X), \oplus, \otimes)$ יהיה חוג קומוטטיבי עם יחידה. (מהם איבר אפס ואיבר יחידה כאן?)

(2) הוכיחו את משפטי הומומורפיזם הבאים:
(א) כל הומומורפיזם של חוגים, $R \xrightarrow{\phi} S$, מתפרק להרכבה $R \xrightarrow{\pi} R/_{ker(\phi)} \xhookrightarrow{i} S$. כאן i מוגדר בצורה יחידה.
(ב) נקבע אידאל $I \subset R$ ותת-חוג $S \subset R$. אז $S \cap I$ הינו אידאל ב- S ומתקיים: $S/_{S \cap I} \approx S+I/_I$.
(ג) נקבע אידאלים $I \subset J \subset R$. אז $J/_I$ הינו אידאל ב $R/_I$ ומתקיים: $R/_I \big/ J/_I \approx R/_J$.
(ד) יהי $R \xrightarrow{\phi} S$ הומומורפיזם על. קיימת התאמה חח"ע בין תתי-חוג של S לבין תתי-חוג של R המכילים את $ker(\phi)$. כמו כן, קיימת התאמה חח"ע בין אידאלים של S לבין אידאלים של R המכילים את $ker(\phi)$.

(3) (הכללה של משפט השאריות הסיני) יהא R חוג קומוטטיבי עם $1 \neq 0$, ויהיו $I_1, \ldots, I_k$ אידאלים של R. הוכיחו:
(א) ההעתקה $R \xrightarrow{\phi} R/I_1 \times \cdots \times R/I_k$, $\phi(r) = (r+I_1, \ldots, r+I_k)$ הינה הומומורפיזם ומתקיים: $ker(\phi) = \bigcap\limits_{j=1}^{k} I_j$.
(ב) אם לכל $i \neq j$, האידאלים I_i, I_j הינם קו-מקסימאליים (כלומר $I_i + I_j = R$), אזי ϕ הינו אפימורפיזם וכן: $I_1 \cap \cdots \cap I_k = I_1 \cdot I_2 \cdots I_k$. לכן: $R/_{(I_1 \cdot I_2 \cdots I_k)} = R/_{I_1 \cap \cdots \cap I_k} \approx R/_{I_1} \times \cdots \times R/_{I_k}$.
(ג) (הגירסה הקלאסית) יהיו $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$ זרים בזוגות, כלומר לכל $i \neq j$ מתקיים $\gcd(n_i, n_j) = 1$. הוכיחו שלכל $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ קיים $x \in \mathbb{Z}$ כך ש $x \equiv a_i \pmod{n_i}$ לכל $1 \leq i \leq k$.
(ד) יהיו $f_1(x), \ldots, f_k(x) \in \mathbb{Z}[x]$ פולינומים מאותה דרגה, d. יהיו $n_1, \ldots, n_k$ שלמים זרים בזוגות. הוכיחו שקיים $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ מדרגה d המקיים: $f(x) \equiv f_i(x) \pmod{n_i}$ לכל $1 \leq i \leq k$. (כלומר: $[f(x)] = [f_i(x)] \in \mathbb{Z}/_{n_i\mathbb{Z}}[x]$).

(4) (א) אילו אידאלים בחוג $\mathbb{Z}$ הם ראשוניים? ראשיים? מקסימליים?
(ב) אילו מהאידאים הבאים בחוג $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ הינם ראשוניים: (2), $(1+\sqrt{-1})$, (3)?
(ג) יהי R אחד מ $C^\infty(-1,1)$, $C^r(-1,1)$, $0 < r < \infty$, או $C^0(-1,1)$ (פונקציות רציפות ב $(-1,1)$). בכל אחד מהחוגים ניקח אידאל (x). עבור אילו חוגים האידאל הינו ראשוני? עבור אילו חוגים הוא מקסימלי?

(5) נקבע $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ וניקח $I = (2, 1+\sqrt{-5}) = 2R + (1+\sqrt{-5})R$, האידאל הנוצר ע"י שני האיברים.
(א) הראו כי I איננו אידאל ראשי (השתמשו בנורמה כדי להראות שלשני היוצרים אין מחלק מושתף לא טריוויאלי).
(ב) בדקו ש $I^2 = I \cdot I = (2)$. (זו דוגמא לכך שמכפלה של שני אידאלים לא ראשיים יכולה להיות אידאל ראשי.)

<u>שאלות חזרה</u>

(6) תהיינה N_1, N_2 תת-חבורות נורמאליות של G, כך שמתקיים: $G = N_1 \cdot N_2$. הוכיחו: $G/_{N_1} \times G/_{N_2} \approx G/_{N_1 \cap N_2}$.

(7) בתרגיל בית 8 ראינו שיכון של חוג הקווטרניונים $\mathbb{H} \xhookrightarrow{\phi} Mat_{2\times2}(\mathbb{C})$. מצאו גם שיכון $\mathbb{H} \xhookrightarrow{\psi} Mat_{4\times4}(\mathbb{R})$.
רמז: ניתן להשתמש בשיכון $\mathbb{C} \hookrightarrow Mat_{2\times}(\mathbb{R})$, המוגדר ע"י $(a+ib) \to \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

(8) נבנה הכללה של הקווטרניונים של Hamilton. יהי $\Bbbk$ שדה ממציין שונה מ- 2, ונקבע $a, b \in \Bbbk^\times$. נגדיר קבוצה $(a,b)_\Bbbk = \{\gamma_1 + \gamma_2\mathbf{i} + \gamma_3\mathbf{j} + \gamma_4\mathbf{k} | \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \Bbbk\}$, עם כלל הכפל $\mathbf{i}^2 = a$, $\mathbf{j}^2 = b$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = -\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{k}$.
(א) בדקו שמתקיים $\mathbb{H} = (-1,-1)_\mathbb{R}$.
(ב) הראו שלכל $a, b \in \Bbbk^\times$, $(a,b)_\Bbbk$ הינו חוג לא קומוטטיבי עם יחידה.
(ג) כתבו מפורשות את כל הזהויות המופיעות בשאלה 5 של תרגיל בית 8.
(ד) הוכיחו שלכל $a, b \in \Bbbk^\times$, $(a,b)_F$ חוג פשוט, כלומר כל אידאל ב- $(a,b)_F$ הינו (0) או $(a,b)_F$.
הדרכה: יהא $(0) \neq I \subseteq (a,b)_\Bbbk$. עבור $q \in I$, חשבו את $\mathbf{i}q + q\mathbf{i}$ ואת $\mathbf{i}q - q\mathbf{i}$. הסיקו שקיים איבר $p = \alpha + \beta\mathbf{i} \in I$. הסיקו מכך שקיים איבר הפיך ב- I.
(ה) מצאו איבר $x \in (-1,-1)_\mathbb{C}$ המקיים $x^2 = 0$. (בפרט, $(-1,-1)_\mathbb{C}$ איננו חוג עם חילוק.)
(ו) $(*)$ יהא $p \neq 2$ ראשוני. הוכיחו ש $(-1,-1)_{\mathbb{Z}_p}$ איננו חוג עם חילוק. (חלקו למקרים: $p = 4k+1$ ו- $p = 4k+3$.)