יסודות תורת הפונקציות המרוכבות: דף תרגילים 1

1. (תשע"ג 1.1) חשבו את המספרים הבאים: $\frac{3+2i}{1-i}$, $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^7$.

2. (תשע"ג 1.2) פתרו את המשוואות הבאות, והציגו בצורה קרטזית ופולארית
   (א) $z^4+1=0$
   (ב) $z^2+z+1=0$
   (ג) $z^2+iz-(2i+1)=0$
   (ד) $z^3+3z^2+4z-8=0$

3. (מהתרגול) מצאו את כל הפתרונות ב- $\mathbb{C}$ עבור המשוואות הבאות:
   (א) $(1-z)^6=(1+z)^6$
   (ב) $1-z^2+z^4-z^6=0$

4. (תשע"ג 1.3) הראו כי אם $p(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ פולינום שכל מקדמיו $\{a_k\}$ ממשיים, ואם $p(z_0)=0$, אז גם $p(\overline{z_0})=0$.

5. (תשע"ג 1.4) הראו כי $3+2i$ שורש של $p(z)=z^4-5z^3+8z^2+7z+13$, ומצאו את שאר השורשים.

6. (תשע"ג 1.6) הראו כי אם $z^3+3z+5=0$ אזי $1<|z|$.

7. (תשע"ג 1.9) אם θ אינה כפולה שלמה של 2π, מצאו ביטוי סגור עבור הסכום $\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta)$.

8. (תשע"ג 1.11) יהיו m,n זוג מספרים שלמים. אם כל אחד מהם ניתן להצגה כסכום שני ריבועים (כלומר, אם ישנם a,b,c,d שלמים כך ש- $m=a^2+b^2, n=c^2+d^2$) הראו שגם mn ניתן להצגה כסכום שני ריבועים.

9. (מהתרגול) מצאו הצגה מהצורה $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\lambda$ למעגל $|z-3|=2$.

10. (אחרי תרגול חמישי 26/3)
    (א) הראו כי אם $a,b,c,d,l,k,m,n\in\mathbb{C}$ ואם $f,g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ מוגדרות
    $$f(z)=\frac{az+b}{cz+d};\qquad g(z)=\frac{lz+k}{mz+n},$$
    אזי $f\left(g(z)\right)=\dfrac{pz+q}{rz+s}$ כאשר
    $$\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l & k\\ m & n\end{bmatrix}.$$
    (כל אימת שהמכנים לעיל לא מתאפסים).
    (ב) בתרגול ראינו כי ההעתקה ההופכית ל- $w=\dfrac{z-3}{1-2z}$ הינה $z=\dfrac{w+3}{2w+1}$. היעזרו בסעיף הקודם כדי להסיק שאם $ad-bc\neq 0$ אזי ההעתקה $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ הינה הפיכה, עם הופכית $g(w)=\dfrac{dw-b}{a-cw}$.
    (ג) (בונוס) השתמשו בהצגה $|z-z_1|=\lambda|z-z_2|$ עבור ישרים ומעגלים במישור כדי להסיק שאם $ad-bc\neq 0$ אז תמונת המעגל $|z-z_0|=r$ תחת ההעתקה $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ הינה ישר או מעגל. האם תוכלו לומר מתי מתקבל ישר ומתי מעגל?

(ד) (בונוס) הראו כי גם תמונת הישר $|z-z_1| = |z-z_2|$ תחת ההעתקה f מהסעיף הקודם היא ישר או מעגל.