יסודות תורת הפונקציות המרוכבות: דף תרגילים 1 - פתרונות

1. (תשע"ג 1.1) חשבו את המספרים הבאים: $\frac{3+2i}{1-i}$, $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^7$.

פתרון:

$$\frac{3+2i}{1-i}=\frac{3+2i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$$

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^7=\left(e^{2\pi i/3}\right)^7=e^{14\pi i/3}=e^{2\pi i/3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

2. (תשע"ג 1.2) פתרו את המשוואות הבאות, והציגו בצורה קרטזית ופולארית

(א) $z^4+1=0$

פתרון:

אם נציג $z=re^{i\theta}$ הרי קיבלנו $r^4e^{i4\theta}=-1=e^{i(\pi+2\pi m)}$. מכאן כי $r=1$ וגם $\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}m$ עבור כל $m\in\mathbb{Z}$, אם כי דיי לקחת $m=0,1,2,3$.

(ב) $z^2+z+1=0$

פתרון:

אנו זוכרים כי פתרונות המשוואה הריבועית תקפים גם למספרים מרוכבים, אם כי מעט מורכב יותר למצוא את זוג השורשים הריבועיים של $\Delta=b^2-4ac$. במקרה שלנו $\Delta=-3$, וזוג השורשים הריבועיים הם $\pm\sqrt{3}i$. אם כן, פתרונות המשוואה הם $z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

(ג) $z^2+iz-(2i+1)=0$

פתרון:

כמקודם $\Delta=i^2-4\cdot1\cdot(-2i-1)=3+8i$. אם נסמן $\theta_0=\arctan\frac{8}{3}$ הרי שורשיה הריבועיים של Δ הם $\pm\sqrt[4]{73}e^{i\theta_0/2}$, ופתרונות המשוואה הם $z_{1,2}=\frac{-i\pm\sqrt[4]{73}e^{i\theta_0/2}}{2}$

(ד) $z^3+3z^2+4z-8=0$

פתרון:

ככלל מסובך לחשב פתרונות משוואה ממעלה שלישית, אולם כאן אנו מבחינים ש- $z=1$ הינו פתרון, ולכן יכולים להציג

$$z^3+3z^2+4z-8=(z-1)\left(z^2+4z+8\right).$$

נותר לנו למצוא (נוסף על $z_1=1$) את פתרונות המשוואה $z^2+4z+8=0$, שהם כידוע $z_{2,3}=\frac{-4\pm4i}{2}=-2\pm2i$.

3. (מהתרגול) מצאו את כל הפתרונות ב- $\mathbb{C}$ עבור המשוואות הבאות:

(א) $(1-z)^6=(1+z)^6$

פתרון:

ראשית נבחין כי $z=\pm1$ אינו פתרון למשוואה. לכן באופן שקול נפתור $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^6=1$. אנו יודעים כי אוסף הפתרונות הוא $\frac{z-1}{z+1}=e^{i\pi m/3}$ עבור $m=0,1,\ldots,5$. סידור מחדש נותן $z=\frac{e^{i\pi m/3}+1}{1-e^{i\pi m/3}}$, עבור אותם m-ים.

(ב) $1-z^2+z^4-z^6=0$

פתרון:

סידור מחדש נותן

$$\frac{1-z^8}{1+z^2}=\frac{1-\left(-z^2\right)^4}{1-\left(-z^2\right)}=\left(-z^2\right)^3+\left(-z^2\right)^2+\left(-z^2\right)^1+\left(-z^2\right)^0=\left(z^2\right)^3-\left(z^2\right)^2+\left(z^2\right)^1-1=0.$$

פתרונות משוואה זו הם בדיוק פתרונות $z^8=1$, שהם כידוע $z=e^{i\pi m/8}$ עבור $m=0,1,\ldots,7$.

4. (תשע"ג 1.3) הראו כי אם $p(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ פולינום שכל מקדמיו $\{a_k\}$ ממשיים, ואם $p(z_0)=0$, אז גם $p(\overline{z_0})=0$.

פתרון:

אם כן, לכל k מתקיים $a_k=\overline{a_k}$, ולכן לכל z

$$p(\overline{z})=\sum_{k=0}^{n}a_k\left(\overline{z}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}a_k\overline{z^k}=\sum_{k=0}^{n}\overline{a_k}\,\overline{z^k}=\sum_{k=0}^{n}\overline{a_kz^k}=\overline{\sum_{k=0}^{n}a_kz^k}=\overline{p(z)}.$$

בפרט, גם $p(\overline{z_0})=\overline{p(z_0)}=\overline{0}=0$.

5. (תשע"ג 1.4) הראו כי $3+2i$ שורש של $p(z)=z^4-5z^3+8z^2+7z+13$, ומצאו את שאר השורשים.

פתרון:

לפי התרגיל הקודם, אם הטענה נכונה הרי גם $\overline{3+2i}=3-2i$ שורש של p, ומכאן כי p מתחלק ב-

$$\left(z-(3+2i)\right)\left(z-(3-2i)\right)=z^2-6z+13$$

ואכן נבחין כי

$$z^4-5z^3+8z^2+7z+13=\left(z^2-6z+13\right)\left(z^2+z+1\right)$$

לכן נוסף על $3\pm 2i$ גם $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ הינם שורשים.

6. (תשע"ג 1.6) הראו כי אם $z^3+3z+5=0$ אזי $|z|>1$.

פתרון:

אחרת, אם $|z|\leq 1$, היינו מקבלים מא"ש המשולש

$$0=\left|z^3+3z+5\right|\geq|5|-\left|z^3\right|-|3z|\geq 5-1-3=2,$$

בסתירה.

7. (תשע"ג 1.9) אם θ אינה כפולה שלמה של 2π, מצאו ביטוי סגור עבור הסכום $\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta)$.

פתרון:

בדיוק כמו בתרגול, נבחין כי $\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta)=\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{k\theta i}\right)$, והרי

$$\sum_{k=0}^{n}e^{k\theta i}=\frac{e^{(n+1)\theta i}-1}{e^{\theta i}-1}=\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta i}-e^{-\theta i/2}}{e^{\theta i/2}-e^{-\theta i/2}}=\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]+i\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]-\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}}{2i\sin\frac{\theta}{2}}=$$

$$=(\star\bowtie\overline{\overline{\barwedge}}\boxtimes)+i\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}-\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

8. (תשע"ג 1.11) יהיו m, n זוג מספרים שלמים. אם כל אחד מהם ניתן להצגה כסכום שני ריבועים (כלומר, אם ישנם a, b, c, d שלמים כך ש- $m = a^2 + b^2, n = c^2 + d^2$) הראו שגם mn ניתן להצגה כסכום שני ריבועים.

פתרון:

אם כן, מתקיים $m = |a + ib|^2\ ,\ \ n = |c + id|^2$, ולכן

$$mn = |(a + ib)(c + id)|^2 = |(ac - bd) + i\,(ad + bc)|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

9. (מהתרגול) מצאו הצגה מהצורה $\lambda = \left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right|$ למעגל $|z - 3| = 2$.

פתרון:

כפי שראינו, אם נבחר z_1 בתוך המעגל נקבל מכך z_2, λ. למשל, נוכל לבחור $z_1 = 4$. נקבל את הדרישה הבאה על z_2:

$$4 = 2^2 = r^2 = (z_1 - z_0)\,\overline{(z_2 - z_0)} = 1 \cdot (\overline{z_2} - 3)$$

כלומר $z_2 = 7$. אנו זוכרים גם כי $\frac{1}{2} = \frac{r}{|z_2 - z_0|} = \frac{|z_1 - z_0|}{r} = \lambda$. קיבלנו את ההצגה

$$\left|\frac{z - 4}{z - 7}\right| = \frac{1}{2} \iff |z - 3| = 2\ .$$

10. (אחרי תרגול חמישי 26/3)

(א) הראו כי אם $a, b, c, d, l, k, m, n \in \mathbb{C}$ ואם $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ מוגדרות

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}; \qquad g(z) = \frac{lz + k}{mz + n}\ ,$$

אזי $f\left(g(z)\right) = \frac{pz + q}{rz + s}$ כאשר

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & k \\ m & n \end{bmatrix}.$$

(כל אימת שהמכנים לעיל לא מתאפסים).

פתרון:

נבחין כי

$$f\left(g(z)\right) = f(\frac{lz + k}{mz + n}) = \frac{a\frac{lz+k}{mz+n} + b}{c\frac{lz+k}{mz+n} + d} = \frac{a\,(lz + k) + b\,(mz + n)}{c\,(lz + k) + d\,(mz + n)} =$$

$$= \frac{(al + bm)\,z + (ak + bn)}{(cl + dm)\,z + (ck + dn)} = \frac{pz + q}{rz + s}$$

(ב) בתרגול ראינו כי ההעתקה ההופכית ל- $w = \frac{z - 3}{1 - 2z}$ הינה $z = \frac{w + 3}{2w + 1}$. היעזרו בסעיף הקודם כדי להסיק שאם $ad - bc \neq 0$ אזי ההעתקה $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ הינה הפיכה, עם הופכית $g(w) = \frac{dw - b}{a - cw}$.

פתרון:

במקרה זה המטריצה $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ הפיכה עם הופכית $\frac{1}{ad - bc}\left[\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right]$. לכן $g(f(z)) = \frac{z + 0}{0z + 1} = z$ כאשר

$$g(w) = \frac{\frac{d}{ad - bc}w + \frac{-b}{ad - bc}}{\frac{-c}{ad - bc}w + \frac{a}{ad - bc}} = \frac{dw - b}{a - cw}.$$

(ג) (בונוס) השתמשו בהצגה $|z-z_1|=\lambda|z-z_2|$ עבור ישרים ומעגלים במישור כדי להסיק שאם $ad-bc\neq 0$ אז תמונת המעגל $|z-z_0|=r$ תחת ההעתקה $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ הינה ישר או מעגל. האם תוכלו לומר מתי מתקבל ישר ומתי מעגל?

פתרון:

כפי שעשינו בתרגול, נשתמש בהופכית ל- $w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, שכעת אנו יודעים כי היא $z=g(w)=\frac{dw-b}{a-cw}$, יחד עם הצגת המעגל כדי לקבל הצגה לתמונה. ואכן:

$$\left|\frac{dw-b}{a-cw}-z_0\right|=r \iff |(dw-b)-z_0(a-cw)|=r|a-cw| \iff$$

$$\iff \left|w-\frac{b+az_0}{d+cz_0}\right|=\left|\frac{c}{d+cz_0}\right|r\left|w-\frac{a}{c}\right| \iff |w-f(z_0)|=\left|\frac{c}{d+cz_0}\right|r\left|w-\frac{a}{c}\right|$$

כאשר מעבר השורה מוצדק רק כאשר $(d+cz_0)\neq 0\neq c$. אם במקרה $c=0$ הרי קיבלנו תחת זאת $|w-f(z_0)|=\frac{r|a|}{|d+cz_0|}$ שגם הוא מעגל, ואם $d+cz_0=0$ קיבלנו $\left|w-\frac{a}{c}\right|=\frac{|b+az_0|}{r|c|}$, שוב מעגל. יש להבחין כי לא יתכן ש- $(d+cz_0)=0=c$, שהרי אז $d=0$, כלומר $ad-bc=0$.

מעניין להבחין כי "$f(\infty)$" $=\frac{a}{c}$, כאשר ∞ היא 'ההפוכה ל- z_0' ביחס למעגל $|z-z_0|=r$.

לבסוף, נבחין כי מתקבל ישר רק במקרה הראשון, ואז בדיוק אם $r\left|\frac{c}{d+cz_0}\right|=1$, כלומר מתקבל ישר אם ורק אם $\left|z_0-\left(-\frac{d}{c}\right)\right|=r$, או במילים אחרות כאשר $\left(-\frac{d}{c}\right)$ נמצאת על המעגל. (זוהי הנקודה ש- f 'שולחת ל- ∞'.)

(ד) (בונוס) הראו כי גם תמונת הישר $|z-z_1|=|z-z_2|$ תחת ההעתקה f מהסעיף הקודם היא ישר או מעגל.

פתרון:

ניתן לפתור סעיף זה כמו הסעיף הקודם, אך תחת זאת נבחין כי תיאור אחר לישר הוא

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}-0\right|=1,$$

כלומר הישר מתקבל כתמונת מעגל היחידה תחת ההעתקה ההופכית ל- $w=\frac{z-z_1}{z-z_2}$, שהיא $z=g(w)=\frac{z_1-z_2w}{1-w}$ (כלומר g שולחת את מעגל היחידה אל הישר שלנו).

ראינו בסעיפים קודמים כי ל- $h(w)=f(g(w))$ יש אותה הצורה כהעתקות בהן אנו עוסקים, ולכן לפי הסעיף הקודם אנו כבר יודעים שהיא שולחת את מעגל היחידה לישר או מעגל. כיוון ש- f שולחת את הישר שלנו בדיוק לתמונת מעגל היחידה תחת h, סיימנו.