

יסודות תורת הפונקציות המרוכבות: דף תרגילים 2

1. מצאו אם הסדרות הבאות מתכנסות, ואם כן מצאו את גבולן.

(א) $(1+i)^n$

(ב) $(1+i)^{-n}$

(ג) $\frac{n^2+in}{n^2+i}$

(ד) $\frac{(-1)^n n}{n+i}$

2. (תש"ע 2.4) חשבו $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{it} + \dots + e^{int}}{n}$.

3. (תש"ע 2.9) מצאו את כל הפתרונות למשוואה $\sin z = 2$.

4. ניקח איזה $z_0 \in \mathbb{C}$, ועבור כל $0 \leq n$ כך ש- $z_n \neq 0$ נגדיר

$$z_{n+1} = \frac{1}{2} \left(z_n - \frac{1}{z_n} \right)$$

(א) אם כל z_n מוגדר, ומתקיים $z_n \rightarrow w$, הראו כי $w^2 = -1$.

(ב) אם $z_0 \in \mathbb{R}$ וכל z_n מוגדר, הראו ש- (z_n) סדרה מתבדרת.

(ג) אם $z_0 \in \mathbb{R}, z_0 \neq 0$, הראו כי (z_n) מוגדרת ומתכנסת.

(ד) אם $|z_0| = 1$ אבל $z_0 \neq \pm 1$, הראו ש- (z_n) מוגדרת ומתכנסת.

(ה) הראו שאם $0 < \text{Im}(z_0) < \infty$ אז (z_n) מוגדרת ומתכנסת ל- $-i$, ואם $0 > \text{Im}(z_0)$ אז (z_n) מוגדרת ומתכנסת ל- i .

(רמז: התבוננו ב- $\left| \frac{z_n - i}{z_n + i} \right|$.)

5. היכן הפונקציות הבאות רציפות?

(א) $(z^2 - 1)^{-1}$

(ב) $\frac{z-i}{2z}$

(ג) $\frac{z^2+1}{z^3+1}$

(ד) $\frac{z}{(\text{Re}(z))^2}$

6. (תשס"ט 2.2) תהא $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ונניח שלכל $1 \leq n$ מתקיים $0 \leq r_n \leq \alpha, -\alpha \leq \theta_n \leq \alpha$. נסמן $z_n = r_n e^{i\theta_n}$. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ מתכנס.

7. (תשע"ד-סתיו 2.7) מצאו רדיוס התכנסות של הטורים הבאים

(א) $\sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n$

(ב) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n$

(ג) $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n$

(ד) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$

(ה) $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-n} z^n$

8. פתחו את הפונקציות הבאות לצורת $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ וציינו היכן הפיתוח מתכנס.

(א) $\frac{1}{2z+5}$

(ב) $\frac{1+iz}{1-iz}$

(ג) $\frac{1}{1-z+z^2}$

(ד) $\frac{1}{(z^2-1)(z^2-9)}$

9. פתחו את הפונקציות $(1-z)^{-1}$, $(z(z+2))^{-1}$ לכל אחת מן הצורות

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+1)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n$$