יסודות תורת הפונקציות המרוכבות: דף תרגילים 2

1. מצאו אם הסדרות הבאות מתכנסות, ואם כן מצאו את גבולן.

(א) $(1+i)^n$

פתרון:

נבחין כי $|1+i| = \sqrt{2}$, כך ש-

$$\left|(1+i)^n\right| = |1+i|^n = 2^{n/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty .$$

מכאן כי הסדרה מתבדרת לאינסוף (או שואפת לאינסוף, במובן 'רחב').

(ב) $(1+i)^{-n}$

פתרון:

כמקודם

$$\left|(1+i)^{-n}\right| = |1+i|^{-n} = 2^{-n/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

(ג) $\frac{n^2+in}{n^2+i}$

פתרון:

כפי שראינו בתרגול מקדמי החזקות הגבוהות ביותר במונה ובמכנה מכתיבים את הגבול, כך שבמקרה זה הגבול צריך להיות 1. ואכן:

$$\left|\frac{n^2+in}{n^2+i} - 1\right| = \left|\frac{in-i}{n^2+i}\right| = \frac{|n-1|}{|n^2+i|} \le \frac{|n|+|1|}{|n^2|-|1|} = \frac{n+1}{n^2-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

(ד) $\frac{(-1)^n n}{n+i}$

פתרון:

בדיוק כמו בסעיף הקודם אפשר לראות ש- $\frac{n+i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. לכן, אם הסדרה לעיל מתכנסת לגבול w_0 היינו מקבלים ש-

$$(-1)^n = \frac{(-1)^n n}{n+i} \cdot \frac{n+i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} w_0 \cdot 1 = w_0 ,$$

בסתירה. לכן הסדרה מתבדרת.

2. (תש"ע 2.4) חשבו $\lim_{n\to\infty} \frac{1+e^{it}+\ldots+e^{int}}{n}$.

3. (תש"ע 2.9) מצאו את כל הפתרונות למשוואה $\sin z = 2$.

פתרון:

ישרת אותנו בעתיד להבחין ש-

$$\sin(a+ib) = \frac{e^{i(a+ib)} - e^{-i(a+ib)}}{2i} = \frac{e^{-b}\left(\cos a + i\sin a\right) - e^{b}\left(\cos a - i \sin a\right)}{2i} =$$
$$= \sin a \left(\frac{e^b+e^{-b}}{2}\right) + i\cos a\left(\frac{e^b - e^{-b}}{2}\right) = \sin a \cosh b + i \cos a \sinh b$$

לכן מהמשוואה שלנו נקבל

$$\sin a \cosh b = 2; \qquad \cos a \sinh b = 0 .$$

אם $\sinh b = 0$ היינו מקבלים $b = 0$ ולכן $\cosh b = 1$, כלומר $\sin a = 2$, מה שאינו אפשרי. לכן בהכרח $\cos a = 0$, וכיוון ש- $\cosh b \geq 0$ תמיד הרי במקרה שלנו גם $\sin a \geq 0$. זה מתרחש כאשר $a = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$ עבור $m \in \mathbb{Z}$ כלשהו, או אז $\sin a = 1$. מכאן נקבל כי $\cosh b = 2$ כלומר

$$.e^{2b} - 4e^b + 1 = 0 \implies b = \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$$

לחלופין, היינו יכולים לנקוט בגישה שסייעה לנו בשורה האחרונה מלכתחילה:

$$.\sin z = 2 \iff \left(e^{iz}\right)^2 - 4i\left(e^{iz}\right) - 1 = 0$$

כלומר e^{iz} הוא שורש של המשוואה הריבועית $w^2 - 4iw - 1 = 0$. שורשיה הם $w_{1,2} = i\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$, מה שנותן לנו

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi m = \arg\left[i\left(2 \pm \sqrt{3}\right)\right] = \arg\left(e^{iz}\right) = \mathrm{Im}\left(iz\right) = \mathrm{Re}\left(z\right)$$

וגם

$$2 \pm \sqrt{3} = \left|i\left(2 \pm \sqrt{3}\right)\right| = \left|e^{iz}\right| = e^{\mathrm{Re}(iz)} = e^{-\mathrm{Im}(z)} \implies \mathrm{Im}\left(z\right) = -\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$$

(מדוע ההבדל?)

4. ניקח איזה $z_0 \in \mathbb{C}$, ועבור כל $n \geq 0$ כך ש- $z_n \neq 0$ נגדיר

$$.z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n - \frac{1}{z_n}\right)$$

(א) אם כל z_n מוגדר, ומתקיים $z_n \to w$, הראו כי $w^2 = 1$.

פתרון:

בתרגיל חסר סימן –: נבחין כי לכל n מתקיים $1 = z_n\left(z_n - 2z_{n+1}\right)$ אבל הרי

$$.z_n\left(z_n - 2z_{n+1}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w(w - 2w) = -w^2$$

(ב) אם $z_0 \in \mathbb{R}$ וכל z_n מוגדר, הראו ש- $\left(z_n\right)$ סדרה מתבדרת.

פתרון:

נבחין כי במקרה זה תמיד מתקיים $z_n \in \mathbb{R}$, ולכן אינה יכולה לשאוף ל- $\pm i$, אבל ראינו בסעיף הקודם שאלו הגבולות היחידים האפשריים.

(ג) אם $0 \neq iz_0 \in \mathbb{R}$, הראו כי $\left(z_n\right)$ מוגדרת ומתכנסת.

פתרון:

במקרה זה נסמן $t_n = iz_n$ ונבחין כי לכל n מתקיים

$$t_{n+1} = iz_{n+1} = \frac{i}{2}\left(z_n - \frac{1}{z_n}\right) = \frac{1}{2}\left(iz_n + \frac{1}{iz_n}\right) = \frac{1}{2}\left(t_n + \frac{1}{t_n}\right)$$

ולכן t_n תמיד מוגדר, שונה אפס וממשי. נותר להבחין שזוהי סדרה מתכנסת. נשים לב

$$\left|t_{n+2} - t_{n+1}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(t_{n+1} - t_n\right) - \left(\frac{1}{t_n} - \frac{1}{t_{n+1}}\right)\right| = \frac{\left|t_{n+1} - t_n\right|}{2}\left|1 - \frac{1}{t_n t_{n+1}}\right| =$$

$$= \frac{\left|t_{n+1} - t_n\right|}{2}\left|1 - \frac{2}{t_n^2 + 1}\right| = \frac{\left|t_{n+1} - t_n\right|}{2}\frac{\left|t_n^2 - 1\right|}{t_n^2 + 1} \leq \frac{\left|t_{n+1} - t_n\right|}{2}$$

כך שנוכל להראות באינדוקציה ש- $\left|t_{n+1} - t_n\right| \leq \frac{\left|t_1 - t_0\right|}{2^n}$ ולכן זוהי סדרה מתכנסת.

(ד) אם $|z_0| = 1$ אבל $z_0 \neq \pm 1$, הראו ש- (z_n) מוגדרת ומתכנסת.
פתרון:
במקרה הזה נסמן $z_0 = e^{i\theta}$ כאשר θ אינה כפולה שלמה של π, ונקבל

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(z_n - \frac{1}{z_n}\right) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = i\sin\theta \neq 0.$$

עבור שאר הסדרה אנו במצב ממנו התחלנו בסעיף הקודם, ולכן הסדרה מוגדרת ומתכנסת.

(ה) הראו שאם $\mathrm{Im}(z_0) > 0$ אז (z_n) מוגדרת ומתכנסת ל- i, ואם $\mathrm{Im}(z_0) < 0$ אז (z_n) מוגדרת ומתכנסת ל- $-i$.
(רמז: התבוננו ב- $\left|\dfrac{z_n - i}{z_n + i}\right|$).
פתרון:
לפי הרמז, אנחנו מתבוננים בגודל $r_n = \left|\frac{z_n - i}{z_n + i}\right|$. ע"י שימוש בנוסחאת הנסיגה הנתונה, נבחין

$$r_{n+1} = \left|\frac{z_{n+1} - i}{z_{n+1} + i}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}\left(z_n - \frac{1}{z_n}\right) - i}{\frac{1}{2}\left(z_n - \frac{1}{z_n}\right) + i}\right| = \left|\frac{z_n^2 - 1 - 2iz_n}{z_n^2 - 1 + 2iz_n}\right| = \left|\frac{z_n - i}{z_n + i}\right|^2 = r_n^2.$$

באינדוקציה, $r_{n+1} = r_0^{2n}$. מכך ניתן להסיק ראשית כי אם $\mathrm{Im}(z_0) > 0$ הרי $r_0 = \left|\frac{z_0 - i}{z_0 + i}\right| < 1$ ולכן לכל n מתקיים $r_n < 1$, כלומר תמיד $\mathrm{Im}(z_n) > 0$ ובפרט $z_n \neq 0$. לכן הסדרה מוגדרת.
יתר על כן $r_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, וכיוון ש-

$$|z_n + i| \leq |z_n - i| + 2,$$

לא יתכן ש- $|z_n + i| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ וגם $\left|\frac{z_0 - i}{z_0 + i}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. לכן בהכרח $|z_n - i| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
עבור $\mathrm{Im}(z_0) < 0$, נבצע בדיוק אותו מהלך עבור $1/r_n$, ונקבל $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -i$.

5. היכן הפונקציות הבאות רציפות?
(א) $\left(z^2 - 1\right)^{-1}$
פתרון:
כיוון שחוקי גבולות עובדים גם עם מספרים מרוכבים, הרי מנת פונקציות רציפות רציפה לפחות בכל מקום בו פונקציית המכנה אינה מתאפסת. לכן כאן הפונקציה רציפה לכל $z \neq \pm 1$. כיוון שהגבול בנקודות אלו הוא אינסוף, היא אינה רציפה שם.

(ב) $\frac{z-i}{2z}$
פתרון:
יתכן שייקל עלינו לפתור את התרגיל אם נבחין ש-

$$\frac{z - i}{2z} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{z}.$$

אם כן, הפונקציה רציפה בדיוק היכן ש- $\frac{1}{z}$ רציפה, כלומר לכל $z \neq 0$.

(ג) $\frac{z^2+1}{z^3+1}$
פתרון:
שוב המכנה מתאפס בדיוק ב- $z = e^{im\pi/3}$ עבור $m = 0, 1, 2$ ובנקודות אלו המונה אינו מתאפס, כלומר הפונקציה שואפת לאינסוף. לכן היא רציפה בכל המישור מלבד נקודות אלו.

(ד) $\frac{z}{(\mathrm{Re}(z))^2}$

פתרון:

שוב אנו רואים שהפונקציה בהכרח רציפה בכל $z \neq 0$, אולם כדי לקבוע כיצד היא מתנהגת בראשית יש להבחין כי

$$\left|\frac{z}{\left(\mathrm{Re}\left(z\right)\right)^2}\right| = \sqrt{\frac{\mathrm{Re}\left(z\right)^2 + \mathrm{Im}\left(z\right)^2}{\mathrm{Re}\left(z\right)^2}} \cdot \frac{1}{\left|\mathrm{Re}\left(z\right)\right|} \geq \frac{1}{\left|\mathrm{Re}\left(z\right)\right|}$$

ולכן הפונקציה מתבדרת לאינסוף בראשית.

6. (תשס"ט 2.2) תהא $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ונניח שלכל $1 \leq n$ מתקיים $0 \leq r_n$, $-\alpha \leq \theta_n \leq \alpha$. נסמן $z_n = r_n e^{i\theta_n}$. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ מתכנס.

7. (תשע"ד-סתיו 2.7) מצאו רדיוס התכנסות של הטורים הבאים

(א) $\sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n$

פתרון:

לפי נוסחת הדמרד רדיוס ההתכנסות נתון ע"י

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{n^k} = \left(\limsup \sqrt[n]{n}\right)^k = 1^k = 1,$$

כאשר השוויון האמצעי מוצדק ע"י כך ש- $x \mapsto x^k$ היא פונקציה רציפה ומונוטונית עולה.

(ב) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n$

פתרון:

שוב לפי הדמרד

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a^n|} = \limsup \sqrt[n]{|a|^n} = \limsup |a| = |a|.$$

(ג) $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n$

(ד) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$

(ה) $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-n} z^n$

8. פתחו את הפונקציות הבאות לצורת $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ וציינו היכן הפיתוח מתכנס.

(א) $\frac{1}{2z+5}$

פתרון:

$$\frac{1}{2z+5} = \frac{1}{5}\frac{1}{1-(-\frac{2}{5}z)} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}z\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{5^{n+1}} z^n$$

אשר קיים כאשר $\left|-\frac{2}{5}z\right| < 1$ או במילים אחרות כאשר $|z| < \frac{5}{2}$.

(ב) $\frac{1+iz}{1-iz}$

פתרון:

$$\frac{1+iz}{1-iz} = 1 + 2iz\frac{1}{1-iz} = 1 + 2iz\sum_{n=0}^{\infty}\left(iz\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2i^n z^n$$

אשר קיים כאשר $|iz| < 1$ או כאשר $|z| < 1$.

ג) $\frac{1}{1-z+z^2}$

פתרון:

$$\frac{1}{1-z+z^2}=i\left(\frac{1}{z-e^{-\pi i/3}}-\frac{1}{z-e^{\pi i/3}}\right)=i\left(e^{-\pi i/3}\frac{1}{1-e^{-\pi i/3}z}-e^{\pi i/3}\frac{1}{1-e^{\pi i/3}z}\right)=$$

$$=ie^{-\pi i/3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-\pi i/3}z\right)^n-ie^{\pi i/3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{\pi i/3}z\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}i\left(e^{-(n+1)\pi i/3}-e^{(n+1)\pi i/3}\right)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right)z^n$$

והפיתוח קיים כאשר $|z|=\left|e^{\pm\pi i/3}z\right|<1$.

ד) $\frac{1}{(z^2-1)(z^2-9)}$

פתרון:

$$\frac{1}{\left(z^2-1\right)\left(z^2-9\right)}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1-z^2}-\frac{1}{9-z^2}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1-z^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{z^2}{9}}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^2\right)^n-\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^2}{9}\right)^n\right)=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{9^{n+1}}\right)z^{2n}$$

כאשר הפיתוח קיים כאשר $|z|<\min\{1,3\}=1$.

9. פתחו את הפונקציות $(1-z)^{-1},\ (z(z+2))^{-1}$ לכל אחת מן הצורות
$$.\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z+1)^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-i)^n$$

פתרון:

$$(1-z)^{-1}=\frac{1}{2-(z+1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n$$

$$(1-z)^{-1}=\frac{1}{(1-i)-(z-i)}=\frac{1}{1-i}\frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}}=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-i)^{n+1}}(z-i)^n$$

$$\begin{aligned}(z(z+2))^{-1}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(-(z-1))}-\frac{1}{3-(-(z-1))}\right)=\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(-(z-1))}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{-(z-1)}{3}}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-(z-1))^n-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-(z-1)}{3}\right)^n=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+2}}\right)(z-1)^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(z(z+2))^{-1}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{i-(-(z-i))}-\frac{1}{i+2-(-(z-i))}\right)=\\&=\frac{1}{2i}\frac{1}{1-i(z-i)}-\frac{1}{2(i+2)}\frac{1}{1-\frac{-(z-i)}{i+2}}=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(i(z-i))^n-\frac{1}{2(i+2)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-(z-i)}{i+2}\right)^n=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i^n}{2i}-\frac{(-1)^n}{2(i+2)^{n+1}}\right)(z-i)^n\end{aligned}$$