יסודות תורת הפונקציות המרוכבות: דף תרגילים 3

1. (חלקית: תשע"ה סתיו 2.1,2.3) מצאו את החלק הממשי והמדומה של כל אחת מהפונקציות הבאות, בדקו היכן הן מקיימות את משוואות קושי-רימן והיכן הן גזירות, ושם מצאו את נגזרתן.
   (א) $f(z)=\frac{iz+2}{2i-z}$
   (ב) $f(z)=\frac{1}{\mathrm{Im}(z)+i}$
   (ג) $f(x+iy)=x^2-y^2-2ixy$
   (ד) $f(x+iy)=\frac{ix+1}{y}$
   (ה) $f(x+iy)=\log\left(x^2+y^2\right)+2i\arctan\frac{x}{y}$ בתחום $\{x+iy \mid y>0\}$.
   (ו) $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ עבור $0\neq ad-bc$.

2. (תשע"ה סתיו 2.2) מצאו פונקציה $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ הגזירה בכל התחום ומקיימת
$$f(2)=0 \quad \text{וגם} \quad \mathrm{Im}\left(f(x+iy)\right)=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

3. בתרגיל זה נראה שלא ניתן להכליל את משפט ערך הביניים המוכר לנו מחדו"א 1 לפונקציות מרוכבות (הזכרו שבחדו"א 2 ראיתם שניתן להכליל את המשפט לפונקציות סקלאריות של כמה משתנים, אך לא לפונקציות וקטוריות).
   התבוננו בפונקציה $f(z)=z^3$. הראו שלא קיימת נקודה c הנמצאת על הקטע הישר בין $1,i$ כך ש-
$$\frac{f(i)-f(1)}{i-1}=f'(c).$$

4. (תשע"ה סתיו 2.5) ניקח $U\subseteq C$ פתוחה וקשירה, ותהא $f:U\to\mathbb{C}$. הראו כי אם $f,\overline{f}$ שתיהן גזירות בכל התחום, אזי f קבועה.

5. (תש"ע 4.6) ניקח $U\subseteq C$ פתוחה וקשירה, ותהא $f:U\to\mathbb{C}$ גזירה בכל התחום. נסמן כרגיל $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$. אם נתון שבכל U מתקיים $u(x,y)v(x,y)\equiv 3$, הראו ש- f קבועה.

6. תהא $f:D_1(0)\to\mathbb{C}$ גזירה בכל התחום, ונגדיר $g(z)=\overline{f(\overline{z})}$. הראו כי g גזירה ב- $a\in D_1(0)$ אם ורק אם $f'(a)=0$.

7. ניקח $U\subseteq C$ פתוחה וקשירה, ותהא $u(x,y)+iv(x,y)=f(x+iy):U\to\mathbb{C}$. נתון כי u,v דיפרנציאביליות בכל התחום.
   (א) הסבירו מדוע ל- f יש נגזרות חלקיות לפי x וגם y בכל נקודה $x_0+iy_0\in U$.
   (ב) נגדיר
$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \text{וגם} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$
   הראו שאם f גזירה אזי
$$\frac{\partial f}{\partial z}=f' \qquad \text{וגם} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0.$$
   (ג) הראו כי אם $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$ בכל התחום, אזי f גזירה.