יסודות תורת הפונקציות המרוכבות: דף תרגילים 3

1. (חלקית: תשע"ה סתיו 2.1,2.3) מצאו את החלק הממשי והמדומה של כל אחת מהפונקציות הבאות, בדקו היכן הן מקיימות את משוואות קושי-רימן והיכן הן גזירות, ושם מצאו את נגזרתן.

(א) $f(z)=\frac{iz+2}{2i-z}$

(ב) $f(z)=\frac{1}{\mathrm{Im}(z)+i}$

(ג) $f(x+iy)=x^2-y^2-2ixy$

(ד) $f(x+iy)=\frac{ix+1}{y}$

פתרון:

נשים לב כי $u(x,y)=\frac{1}{y}$, $v(x,y)=\frac{x}{y}$. אם נדרוש קיום משוואות C-R נקבל:

$$0=u'_x=v'_y=-\frac{x}{y^2},$$

בכל מקום בו $y\neq 0$. על ציר x הפונקציה בבירור מתבדרת לאינסוף, ולכן אין צורך לטפל בנקודות אלו בנפרד. המשוואה השניה היא

$$-\frac{1}{y^2}=u'_y=-v'_x=-\frac{1}{y},$$

והפתרון היחיד הוא $z=i$. כיוון ש- u,v דיפרנציאביליות מחוץ לציר x, הפונקציה גזירה שם. נגזרתה תהיה

$$f'(i)=u'_x(0,1)+iv'_x(0,1)=i.$$

(ה) $f(x+iy)=\log\left(x^2+y^2\right)+2i\arctan\frac{x}{y}$ בתחום $\{x+iy\mid y>0\}$.

(ו) $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ עבור $0\neq ad-bc$.

פתרון:

נגזור לפי כללי גזירה מוכרים:

$$f'(z)=\frac{a(cz+d)-(az+b)c}{(cz+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}.$$

מעניין להבחין כי הנגזרת לעולם אינה אפס.

2. (תשע"ה סתיו 2.2) מצאו פונקציה $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ הגזירה בכל התחום ומקיימת

$$f(2)=0 \quad \text{וגם} \quad \mathrm{Im}\left(f(x+iy)\right)=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

3. בתרגיל זה נראה שלא ניתן להכליל את משפט ערך הביניים המוכר לנו מחדו"א 1 לפונקציות מרוכבות (הזכרו שבחדו"א 2 ראיתם שניתן להכליל את המשפט לפונקציות סקלאריות של כמה משתנים, אך לא לפונקציות וקטוריות).

התבוננו בפונקציה $f(z)=z^3$. הראו שלא קיימת נקודה c הנמצאת על הקטע הישר בין $1,i$ כך ש-

$$\frac{f(i)-f(1)}{i-1}=f'(c).$$

פתרון:

נבחין כמובן ש- $\frac{f(i)-f(1)}{i-1}=\frac{1+i}{1-i}=i$. כמו כן $f'(z)=3z^2$. אם הייתה נקודה כזו הרי

$$i=3c^2 \implies |c|=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ואולם מינימום הערך המוחלט על הקטע $[1,i]$ מתקבל בנקודה $\left|\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\geq\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. (תשע"ה סתיו 2.5) ניקח $U \subseteq C$ פתוחה וקשירה, ותהא $f : U \to \mathbb{C}$. הראו כי אם $f, \overline{f}$ שתיהן גזירות בכל התחום, אזי f קבועה.

5. (תש"ע 4.6) ניקח $U \subseteq C$ פתוחה וקשירה, ותהא $f : U \to \mathbb{C}$ גזירה בכל התחום. נסמן כרגיל $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. אם נתון שבכל U מתקיים $u(x,y)v(x,y) \equiv 3$, הראו ש- f קבועה.

6. תהא $f : D_1(0) \to \mathbb{C}$ גזירה בכל התחום, ונגדיר $g(z) = \overline{f(z)}$. הראו כי g גזירה ב- $a \in D_1(0)$ אם ורק אם $f'(a) = 0$.

פתרון:

ראשית, אם $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, $g(x+iy) = h(x,y) + ik(x,y)$ אזי

$$h(x,y) = u(x,y), \qquad k(x,y) = -v(x,y).$$

כיוון ש- h, k דיפרנציאביליות בכל הדיסק, g גזירה בנקודה אם"ם היא מקיימת את משוואות C-R שם. נבחין גם כי

$$\begin{cases} h'_x = k'_y \\ h'_y = -k'_x \end{cases} \iff \begin{cases} u'_x = -v'_y \\ u'_y = v'_x \end{cases}$$

וכיוון ש- u, v מקיימות בעצמן משוואות C-R הרי כך אם"ם $u'_x = 0 = u'_y$, אם"ם $f' = u'_x - iu'_y = 0$.

7. ניקח $U \subseteq C$ פתוחה וקשירה, ותהא $\mathbb{C} \to U : f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. נתון כי u, v דיפרנציאביליות בכל התחום.

(א) הסבירו מדוע ל- f יש נגזרות חלקיות לפי x וגם y בכל נקודה $x_0 + iy_0 \in U$.

פתרון:

u, v דיפרנציאביליות בכל התחום, ולכן יש להן נגזות חלקיות.

(ב) נגדיר

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \text{וגם} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

הראו שאם f גזירה אזי

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f' \qquad \text{וגם} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

פתרון:

נבחין כי

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left[(u'_x + iv'_x) - i\left(u'_y + iv'_y\right)\right] = \frac{u'_x + v'_y}{2} + i\frac{v'_x - u'_y}{2} = u'_x + iv'_x = f'\frac{1}{2}(0 + i0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left[(u'_x + iv'_x) + i\left(u'_y + iv'_y\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(u'_x - v'_y\right) + i\left(u'_y + v'_x\right)\right] = \frac{1}{2}(0 + i0)$$

(ג) הראו כי אם $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ בכל התחום, אזי f גזירה.

פתרון:

ראינו בסעיף הקודם כי $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ שקול לכך ש- $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$, ואלו בדיוק משוואות C-R.
כיוון שידוע ש- u, v דיפרנציאביליות, קיומן שקול לגזירות f.