יסודות תורת הפונקציות המרוכבות: דף תרגילים 4

1. בהינתן $0 < r < R$ כלשהם, הראו ע"י שימוש בפונקציה $f(z) = \frac{R+z}{z(R-z)}$ ומסילה מתאימה כי
$$\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos\theta + r^2} d\theta = 2\pi .$$

2. ע"י שימוש במסילה לאורך האליפסה $\frac{\mathrm{Re}(z)^2}{a^2} + \frac{\mathrm{Im}(z)^2}{b^2} = 1$ הראו ש-
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab} .$$

3. תהא γ מסילה פשוטה שהינה מקטע מישר או מקשת מעגל, המתחילה ב- 0 ומסתיימת ב- 1. מצאו את כל הערכים האפשריים של

א. $\int_\gamma z^3 dz$

ב. $\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$ כאשר $\pm i$ אינם על המסילה.

4. (סתיו 13, 5.10) נגדיר $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ בתחום $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{it \mid t \in \mathbb{R},\ |t| \geq 1\}$.
(א) הראו שקיימת ל- f פונקציה קדומה F ב- Ω כך ש- $F(0) = 0$.
(ב) אם $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$, ואם $U \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid \tan z \in \Omega\}$ פתוחה וקשירה ומכילה את הראשית, הראו שלכל $z \in U$ מתקיים $F(\tan z) = z$. (F היא $\arctan$.)

5. תהא γ מסילה סגורה פשוטה. השתמשו במשפט גרין כדי להוכיח שאם Ω היא הפנים של γ אזי $\int_\gamma \overline{z} dz = 2i\,\mathrm{Area}(\Omega)$.

6. (סתיו תשע"ג, 4.6) היזכרו במשפט הקירוב של ויירשטראס, הגורס כי אם $I \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטית (למשל $I = [a,b]$) ו- $f: I \to \mathbb{R}$ רציפה, אזי לכל $0 < \varepsilon$ קיים פולינום $p \in \mathbb{R}[x]$ כך ש-
$$\sup_{x \in I} |f(x) - p(x)| \leq \varepsilon .$$
הראו שהדבר אינו תקף לפונקציות מרוכבות, ובפרט עבור $f(z) = \frac{1}{z}$ בתחום $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. מפורשות, מצאו $0 < \varepsilon$ כך שלכל פולינום $p \in \mathbb{C}[z]$ מתקיים $\varepsilon < \sup_{z \in S^1} \left|\frac{1}{z} - p(z)\right|$.
(רמז: תוכלו להיעזר באינטגרל מסילתי לאורך S^1.)

7. בכל אחד מהסעיפים הבאים, האינטגרל מתאפס. הסבירו מדוע.

א. $\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z-3}$

ב. $\int_{|z-i|=4} \frac{dz}{(z-3)^3}$

ג. $\int_{|z|=1} z\,|z|^4\, dz$

ד. $\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{e^z+1}$

8. תהא f אנליטית ב- $\overline{\mathbb{D}}$. הוכיחו שלכל $0<|w|<1$ מתקיים

$$2\pi i f(w) = \int_{|z|=1} \frac{f(z)dz}{z-w} - \int_{|z|=1} \frac{f(z)dz}{z-1/\overline{w}},$$

וע"י כך הוכיחו את נוסחת פואסון:

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} f(e^{it})dt, \quad 0<r<1.$$

9. (סתיו תשע"ד, 3.9) תהא $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$, ועבור $0<R$ תהא γ_R המסילה המורכבת מקטעים ישרים, מ- R אל $R+iR$, אל $-R+iR$, ולבסוף ל- $-R$. הוכיחו כי

$$\exists \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$