יסודות תורת הפונקציות המרוכבות: דף תרגילים 4

1. בהינתן $0 < r < R$ כלשהם, הראו ע"י שימוש בפונקציה $f(z) = \frac{R+z}{z(R-z)}$ ומסילה מתאימה כי

$$\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos\theta + r^2} d\theta = 2\pi .$$

פתרון:
הפונקציה $g(z) = \frac{R+z}{R-z}$ אנליטית בדיסק $D_R(0)$, כך שידוע לנו (נוסחאת קושי) ש-

$$2\pi i = 2\pi i g(0) = \int_{|z|=r} \frac{g(z)dz}{z-0} = \int_{|z|=r} f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{R + re^{i\theta}}{re^{i\theta}\left(R - re^{i\theta}\right)} ire^{i\theta} d\theta =$$

$$= i\int_0^{2\pi} \frac{R + re^{i\theta}}{R - re^{i\theta}} \frac{R - re^{-i\theta}}{R - re^{-i\theta}} d\theta = i\int_0^{2\pi} \frac{R^2 + rR\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) - r^2}{R^2 - rR\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) + r^2} d\theta =$$

$$= i\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos\theta + r^2} d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{2rR\sin\theta}{R^2 - 2rR\cos\theta + r^2} d\theta$$

השוואת חלק מדומה של שני האגפים מניבה את הזהות המבוקשת. (החלק הממשי מתאפס, כפי שרואים מהשוויון, או מתוך אי-זוגיות סביב π.)

2. ע"י שימוש במסילה לאורך האליפסה $\frac{\mathrm{Re}(z)^2}{a^2} + \frac{\mathrm{Im}(z)^2}{b^2} = 1$ הראו ש-

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab} .$$

פתרון:
פרמטריזציה למסילה לאורך האליפסה היא $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ המוגדרת $\gamma(t) = a\cos t + ib\sin t$. אנו יודעים כי

$$2\pi i = \int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{-a\sin t + ib\cos t}{a\cos t + ib\sin t} dt = \int_0^{2\pi} \frac{(b-a)\sin t\cos t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} dt + i\int_0^{2\pi} \frac{ab\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} dt$$

כעת השוואת החלק המדומה של שני אגפי השוויון נותנת את המבוקש.

3. תהא γ מסילה פשוטה שהינה מקטע מישר או מקשת מעגל, המתחילה ב- 0 ומסתיימת ב- 1. מצאו את כל הערכים האפשריים של

א. $\int_\gamma z^3 dz$

ב. $\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$ כאשר $\pm i$ אינם על המסילה.

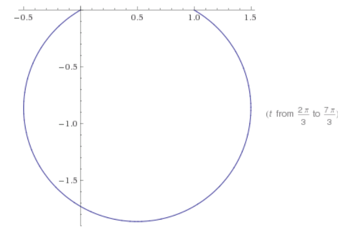
פתרון:

(א) כאן אין זה משנה מהי המסילה, כל עוד ידועות נקודות ההתחלה והסיום שלה, כיוון שלפי המשפט היסודי

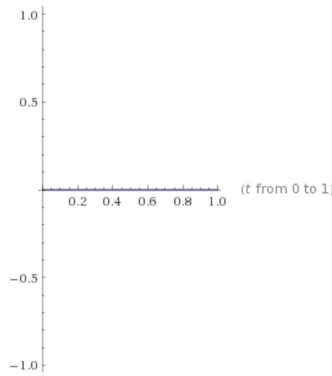
$$\int_\gamma z^3 dz = \int_\gamma \left(\frac{1}{4}z^4\right)' dz = \frac{1}{4}z^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4} .$$

(ב) נגדיר 3 מסילות לדוגמא, בין היתר כדי להראות כיצד התוצאה עלולה להשתנות:

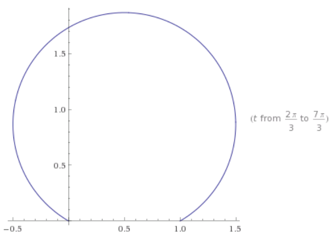
$$\gamma_- : \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right] \to \mathbb{C}$$
$$\gamma_-(t) = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + e^{it}$$



$$\gamma_0 : [0,1] \to \mathbb{C}$$
$$\gamma_0(t) = t$$



$$\gamma_+ : \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right] \to \mathbb{C}$$
$$\gamma_+(t) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + e^{-it}$$



נבחין שלכל מסילה γ כנדרש, בדיוק אחת מבין $\gamma_+, \gamma_0, \gamma_-$ משלימה אותה למסילה סגורה כך ש- $\pm i$ לא מוכלים בפנים המסילה. כיוון שבתנאים אלו האינטגרל מתאפס (שכן $\frac{1}{1+z^2}$ אנליטית על המסילה ובפנימה), הרי $\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$ שווה לאינטגרל על אחת מהמסילות הנתונות לעיל.
אנו יכולים לחשב ישירות

$$\int_{\gamma_0} \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t)\big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

עבור שני האינגרלים הנוספים, נשתמש בנוסחת קושי:

$$\int_{\gamma_-} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{\gamma_- - \gamma_0} \frac{dz}{1+z^2} + \int_{\gamma_0} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{\gamma_- - \gamma_0} \frac{1/(z-i)}{z+i} dz + \frac{\pi}{4} =$$
$$= 2\pi i \left.\frac{1}{z-i}\right|_{z=-i} + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$$
$$\int_{\gamma_+} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{\gamma_0} \frac{dz}{1+z^2} - \int_{\gamma_0 - \gamma_+} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{4} - \int_{\gamma_0 - \gamma_+} \frac{1/(z+i)}{z-i} dz =$$
$$= \frac{\pi}{4} - 2\pi i \left.\frac{1}{z+i}\right|_{z=i} = -\frac{3\pi}{4}$$

4. (סתיו 13, 5.10) נגדיר $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ בתחום $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{it \mid t \in \mathbb{R},\ |t| \geq 1\}$.
(א) הראו שקיימת ל- f פונקציה קדומה F ב- Ω כך ש- $F(0) = 0$.
(ב) אם $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$, ואם $U \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid \tan z \in \Omega\}$ פתוחה וקשירה ומכילה את הראשית, הראו שלכל $z \in U$ מתקיים $F(\tan z) = z$. (F היא $\arctan$.)

5. תהא γ מסילה סגורה פשוטה. השתמשו במשפט גרין כי להוכיח שאם Ω היא הפנים של γ אזי $\int_\gamma \overline{z}dz = 2i\,\mathrm{Area}(\Omega)$.

פתרון:

נתבונן ב- γ, Ω כאילו היו במישור $\mathbb{R}^2$ במקום $\mathbb{C}$, ע"י הגדרת $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+iy \in \Omega\}$ וגם $\Gamma(t) = (\mathrm{Re}\,(\gamma(t)), \mathrm{Im}\,(\gamma(t)))$. אם כן, $\Gamma = \partial U$ ואנו יודעים ממשפט גרין כי

$$\int_\gamma \overline{z}dz = \int_a^b \overline{\gamma(t)}\gamma'(t)dt = \int_a^b (\Gamma_1(t) - i\Gamma_2(t))(\Gamma_1'(t) + i\Gamma_2'(t))\,dt =$$

$$= \int_a^b \left[(\Gamma_1(t)\Gamma_1'(t) + \Gamma_2(t)\Gamma_2'(t)) + i(\Gamma_1(t)\Gamma_2'(t) - \Gamma_2(t)\Gamma_1'(t))\right]dt =$$

$$= \left(\int_\Gamma xdx + ydy\right) + i\left(\int_\Gamma xdy - ydx\right) = 0 + i\int_\Gamma xdy - ydx =$$

$$= i\int_U 2d(x,y) = 2i\,\mathrm{Area}(U) = 2i\,\mathrm{Area}(\Omega)$$

6. (סתיו תשע"ג, 4.6) היזכרו במשפט הקירוב של ויירשטראס, הגורס כי אם $I \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטית (למשל $I = [a,b]$) ו- $f : I \to \mathbb{R}$ רציפה, אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים פולינום $p \in \mathbb{R}[x]$ כך ש-

$$\sup_{x\in I} |f(x) - p(x)| \le \varepsilon\,.$$

הראו שהדבר אינו תקף לפונקציות מרוכבות, ובפרט עבור $f(z) = \frac{1}{z}$ בתחום $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. מפורשות, מצאו $\varepsilon > 0$ כך שלכל פולינום $p \in \mathbb{C}[z]$ מתקיים $\sup_{z\in S^1}\left|\frac{1}{z} - p(z)\right| > \varepsilon$.
(רמז: תוכלו להיעזר באינטגרל מסילתי לאורך S^1.)

7. בכל אחד מהסעיפים הבאים, האינטגרל מתאפס. הסבירו מדוע.

א. $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z-3}$
ב. $\displaystyle\int_{|z-i|=4} \frac{dz}{(z-3)^3}$
ג. $\displaystyle\int_{|z|=1} z\,|z|^4\,dz$
ד. $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{e^z+1}$

פתרון:

(א) נשים לב שהנקודה $z=3$ לא נמצאת על המעגל או בפנימו, ולכן $\frac{1}{z-3}$ אנליטית שם, כך שהאינטגרל הסגור מתאפס.

(ב) הפעם הנקודה $z=3$ דווקא בתוך המעגל, אולם הדבר אינו מפריע. מתקיים $\frac{1}{(z-3)^3} = \left(\frac{-1}{2(z-3)^2}\right)'$ בכל המישור המנוקב $\mathbb{C} \setminus \{3\}$, והרי אינטגרלים סגורים על נגזרת פונקציה אנליטית מתאפסים (משפט יסודי).

(ג) $z\,|z|^4$ אינה אנליטית, אולם לאורך המסילה $|z| = 1$ מתקיים $z\,|z|^4 = z$, כך ש-

$$\int_{|z|=1} z\,|z|^4\,dz = \int_{|z|=1} zdz = 0\,.$$

(ד) $e^z + 1$ אנליטית ומתאפסת רק עבור $z = (1+2k)\pi i$ לאיזה $k \in \mathbb{Z}$. כל הנקודות הנ"ל נמצאות מחוץ למעגל $|z-1| = 1$, כך ש- $\frac{1}{e^z+1}$ אנליטית על המעגל ובפנימו. לכן האינטגרל מתאפס.

8. תהא f אנליטית ב- $\overline{\mathbb{D}}$. הוכיחו שלכל $0<|w|<1$ מתקיים

$$2\pi i f(w)=\int_{|z|=1}\frac{f(z)dz}{z-w}-\int_{|z|=1}\frac{f(z)dz}{z-1/\overline{w}},$$

וע"י כך הוכיחו את נוסחת פואסון:

$$f(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}f(e^{it})dt,\quad 0<r<1.$$

פתרון:

נוסחאת קושי מבטיחה לנו ש- $2\pi i f(w)=\int_{|z|=1}\frac{f(z)dz}{z-w}$. כדי להשלים את השוויון המבוקש, נבחין ש- $1/\overline{w}$ נמצאת מחוץ למעגל $|z|=1$, כך ש- $\frac{f(z)}{z-1/\overline{w}}$ אנליטית על המעגל ובפנימו, ולכן $\int_{|z|=1}\frac{f(z)dz}{z-1/\overline{w}}=0$.
כעת, נוכל להשתמש בשוויון הנ"ל כדי להבחין

$$2\pi i f(re^{i\theta})=\int_{|z|=1}\frac{f(z)dz}{z-re^{i\theta}}-\int_{|z|=1}\frac{f(z)dz}{z-e^{i\theta}/r}=\int_{|z|=1}\left[\frac{1}{z-re^{i\theta}}-\frac{1}{z-e^{i\theta}/r}\right]f(z)dz=$$

$$=\int_{|z|=1}\left[\frac{e^{i\theta}\left(r-1/r\right)}{z^2-e^{i\theta}\left(r+1/r\right)z+e^{2i\theta}}\right]f(z)dz=\int_{|z|=1}\left[\frac{r^2-1}{re^{-i\theta}z^2-\left(r^2+1\right)z+re^{i\theta}}\right]f(z)dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2-1}{re^{-i\theta}e^{2it}-\left(r^2+1\right)e^{it}+re^{i\theta}}\right]f(e^{it})ie^{it}dt=i\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2-1}{re^{-i(\theta-t)}-\left(r^2+1\right)+re^{i(\theta-t)}}\right]f(e^{it})dt=$$

$$=i\int_0^{2\pi}\left[\frac{1-r^2}{1-r\left(e^{i(\theta-t)}+e^{-i(\theta-t)}\right)+r^2}\right]f(e^{it})dt=i\int_0^{2\pi}\left[\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\right]f(e^{it})dt$$

9. (סתיו תשע"ד, 3.9) תהא $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$, ועבור $0<R$ תהא γ_R המסילה המורכבת מקטעים ישרים, מ- R אל $R+iR$, אל $-R+iR$, ולבסוף ל- $-R$. הוכיחו כי

$$\exists\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}f(z)dz=0.$$