

יסודות תורת הפונקציות המרוכבות: דף תרגילים 5

1. הראו כי אם $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ שלמה ולא קבועה, אזי $\{f(z) \mid z \in \mathbb{C}\}$ צפופה ב- \mathbb{C} . במילים אחרות, הראו כי לכל $w_0 \in \mathbb{C}$ ולכל $0 < r$ קיים $z \in \mathbb{C}$ כך ש- $|f(z) - w_0| < r$.

2. תהא f שלמה, ונניח שלכל $n \in \mathbb{Z}$ מתקיים $f(n) = 0$. האם f היא פונקציית האפס? אם כן, הוכיחו זאת. אחרת, הביאו דוגמא נגדית והסבירו כיצד הדבר מתיישב עם עקרון היחידות.

3. (תש"ע 7.15-16)

(א) הראו כי אם f שלמה, ובעלת אינסוף אפסים באיזה תחום חסום $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, אזי $f(z) \equiv 0$.
 (ב) תהא f שלמה, ולכל $z_0 \in \mathbb{C}$ יהא $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0)(z - z_0)^n$ פיתוח טיילור שלה סביב z_0 .
 אם לכל $z_0 \in \mathbb{C}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $c_n(z_0) = 0$, הראו כי f היא פולינום.
 (רמז: מה הקשר בין נגזרות f ובין $c_n(z)$? סמנו $Z_m^n = \{z \in D_m(0) \mid f^{(n)}(z) = 0\}$, והבחינו כי מהנתון $\mathbb{C} = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} Z_m^n$. השתמשו בטענת עזר: לא יתכן שלכל $n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $|Z_m^n| < \infty$).

4. יהא $\alpha \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ ונגדיר $q = e^{2\pi i \alpha}$. בהינתן $0 < r < R$, מצאו את כל הפונקציות האנליטיות בתחום $r < |z| < R$ ומקיימות $f(z) = f(qz)$.

5. (תשס"ט 8.3, תשע"ד 6.6) מצאו את פיתוחי לורן של הפונקציות הבאות בתחומים הנתונים:

- (א) $0 < |z|, f(z) = \frac{1}{z} \sin^2\left(\frac{2}{z}\right)$
 (ב) $0 < |z|, f(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z^3}$
 (ג) $0 < |z - 2\pi|, f(z) = \frac{\sin z}{z - 2\pi}$
 (ד) $0 < |z - 2|, f(z) = \frac{\sin z}{z - 2}$
 (ה) $1 < |z - (1 + i)| < \sqrt{5}, f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$