יסודות תורת הפונקציות המרוכבות: דף תרגילים 5

1. הראו כי אם $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ שלמה ולא קבועה, אזי $\{f(z)\mid z\in\mathbb{C}\}$ צפופה ב- $\mathbb{C}$. במילים אחרות, הראו כי לכל $w_0\in\mathbb{C}$ ולכל $0<r$ קיים $z\in\mathbb{C}$ כך ש- $|f(z)-w_0|<r$.

פתרון:

אחרת, ישנם איזה $w_0\in\mathbb{C}$ ו- $0<r$ כך שלכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $|f(z)-w_0|\geq r$. אם כן, $g(z):=f(z)-w_0$ גם היא שלמה, אך אינה מתאפסת, ולכן $h(z):=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{f(z)-w_0}$ שלמה, ומתקיים $|h(z)|\leq\frac{1}{r}$. ממשפט ליוביל h קבועה, ולכן g קבועה, ולכן f קבועה, בסתירה.

2. תהא f שלמה, ונניח שלכל $n\in\mathbb{Z}$ מתקיים $f(n)=0$. האם f היא פונקציית האפס? אם כן, הוכיחו זאת. אחרת, הביאו דוגמא נגדית והסבירו כיצד הדבר מתיישב עם עקרון היחידות.

פתרון:

לאו דווקא. כך למשל $\sin(\pi z)$ עונה לדרישות אך אינה אפס. הדבר אינו סותר את משפט היחידות שכן הסדרה $n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$, והרי $\infty\notin\mathbb{C}$, שהוא תחום ההגדרה של $\sin(\pi z)$.

3. (תש"ע 7.15-16)

(א) הראו כי אם f שלמה, ובעלת אינסוף אפסים באיזה תחום חסום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, אזי $f(z)\equiv 0$.

(ב) תהא f שלמה, ולכל $z_0\in\mathbb{C}$ יהא $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z_0)(z-z_0)^n$ פיתוח טיילור שלה סביב z_0. אם לכל $z_0\in\mathbb{C}$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $c_n(z_0)=0$, הראו כי f היא פולינום.

(רמז: מה הקשר בין נגזרות f ובין $c_n(z)$? סמנו $Z_m^n=\left\{z\in D_m(0)\mid f^{(n)}(z)=0\right\}$, והבחינו כי מהנתון $\mathbb{C}=\bigcup_{n,m=1}^{\infty}Z_m^n$. השתמשו בטענת עזר: לא יתכן שלכל $n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים $|Z_m^n|<\infty$.)

4. יהא $\alpha\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ ונגדיר $q=e^{2\pi i\alpha}$. בהינתן $0<r<R$, מצאו את כל הפונקציות האנליטיות בתחום $r<|z|<R$ ומקיימות $f(z)=f(qz)$.

פתרון:

אם f אנליטית בתחום $r<|z|<R$, הרי קיים לה טור לורן שם $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n$. אם כן, מהנתון מתקיים

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n=f(z)=f(qz)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(qz)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{2\pi ni\alpha}z^n .$$

ע"י העברת אגפים וסידור מחדש (מותר לטורי לורן, נזכיר, שכן התכנסותם בהחלט) נקבל

$$0\equiv\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\left(1-e^{2\pi ni\alpha}\right)z^n .$$

כל מקדמי טור זה מתאפסים (שכן הוא מתאפס זהותית), וכך לכל $n\in\mathbb{Z}$ עם $c_n\neq 0$ מתקיים $n\alpha\in\mathbb{Z}$. כיוון ש- $\alpha\notin\mathbb{Q}$ הדבר אפשרי רק עבור $n=0$, כלומר $f(z)\equiv c_0$ קבועה.

5. (תשס"ט 8.3, תשע"ד 6.6) מצאו את פיתוחי לורן של הפונקציות הבאות בתחומים הנתונים:

(א) $f(z)=\frac{1}{z}\sin^2\left(\frac{2}{z}\right)$, $0<|z|$.

(ב) $f(z)=\frac{1-e^{-z}}{z^3}$, $0<|z|$.

(ג) $f(z)=\frac{\sin z}{z-2\pi}$, $0<|z-2\pi|$.

(ד) $f(z)=\frac{\sin z}{z-2}$, $0<|z-2|$.

(ה) $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$, $1<|z-(1+i)|<\sqrt{5}$