

יסודות תורת הפונקציות המרוכבות (להנדסה), בוחן אמצע.

אוניברסיטת בן גוריון

מספר הקורס: 201.1.0071	כללים: אסור לכתוב בצבע אדום.
מרצה: ד.קרנר	הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות
מתרגל: י.יחזקאלי	ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך).
תאריך: 28.05.2017	בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?", "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".
משך המבחן: שעתיים	פתרו את כל השאלות (סה"כ 100 נקודות)
ניקוד:	אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבוני

יש לנמק היטב את כל התשובות.

$$(1) \quad \int_{|z|=1} \frac{\log(1+\frac{z}{3})}{z^3} dz \quad (20 \text{ נקודות}) \quad \text{חשבו}$$

$$(2) \quad (20 \text{ נקודות}) \quad \text{האם ל} \quad f(z) = \frac{\sin(z)}{z(z^2-\pi^2)} \quad \text{קיימת פונקציה קדומה ב} \quad \mathbb{C} \setminus D_{10}(0) \quad ?$$

$$(3) \quad (20 \text{ נקודות}) \quad \text{בניח ש} \quad f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \quad \text{מקיימת:} \quad |f(z)| = 1 \quad \text{עבור} \quad |z| = 1 \quad \text{ו} \quad f \text{ מתאפסת בתוך העיגול} \quad D_1(0) \quad \text{רק בנקודה} \quad z = 0. \quad \text{הוכיחו:} \quad f(z) = c \cdot z^k.$$

$$(4) \quad (20 \text{ נקודות}) \quad \text{מצאו את רדיוס ההתכנסות של טור טיילור של פונקציה} \quad f(z) = \frac{\sin(z)}{e^{\sin(z)} - 1} \quad \text{בנקודה} \quad z = 2.$$

$$(5) \quad (20 \text{ נקודות}) \quad \text{יהי} \quad \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C} \quad \text{תחום פתוח וקשיר. בניח ש} \quad f \in \mathcal{O}(\mathcal{U}) \quad \text{מקיימת: עבור כל} \quad z_0 \in \mathcal{U} \quad \text{וכל} \quad \epsilon > 0, \quad \text{קיימות נקודות} \quad z_1, z_2 \in D_\epsilon(z_0) \quad \text{כך ש} \quad f(z_1) = f(z_2). \quad \text{האם} \quad f \quad \text{בהכרח קבועה?}$$

בהצלחה!