

יסודות תורת הפונקציות המרוכבות (להנדסה), מועד א.

אוניברסיטת בן גוריון

<p>מספר הקורס: 201.1.0071 מרצה: ד.קרנר מתרגל: י.יחזקאלי תאריך: 20.07.2017 משך המבחן: 3 שעות ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 100 נקודות) הבחינה מותרת לפרסום אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבוני</p>	<p>כללים: אסור לכתוב בצבע אדום. הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך). בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?", "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".</p>
--	---

יש לנמק היטב את כל התשובות.

(1) (15 נקודות) האם קיימת פונקציה $f \in \mathcal{O}(D_1(0))$ המקיימת $\{f(\frac{1}{n}) = \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{n}\}_{n=1,2,\dots}$?
 (תנו דוגמא מפורשת או הוכיחו שלא קיימת כזו)

(2) (15 נקודות) נגדיר $f \in \mathcal{O}(\overline{D_1(0)})$ ע"י $f(z) = \frac{1}{(1+az)^2} + \frac{1}{(1+bz)^2}$. כאן הקבועים מקיימים: $|a|, |b| < 1$.
 נניח ש f חסומה על השפה: $|f(z)| \leq 3$ עבור $|z| = 1$. הוכיחו: $\{a^n + b^n \leq \frac{3}{n+1}\}_{n=0,1,2,\dots}$.

(3) (א) (10 נקודות) האם קיימת פונקציה מרומורפית ב \bar{C} והולומורפית ב $\bar{C} \setminus \{0, \infty\}$ המקיימת $|f(z)| \geq \frac{1}{|z|\sqrt{2}}$ ב $C \setminus \{0\}$?
 (ב) (10 נקודות) האם קיימת פונקציה מרומורפית ב $\bar{C} \setminus \{0\}$ והולומורפית ב $\bar{C} \setminus \{0, \infty\}$ המקיימת $|f(z)| \geq \frac{1}{|z|\sqrt{2}}$ ב $C \setminus \{0\}$?

(4) (20 נקודות) יהי (u, v) זוג של פונקציות צמודות הרמונית. נניח שמתקיים $-v(x, y)^2 \leq u(x, y) \leq v(x, y)^2$ ב \mathbb{R}^2 כולו. הוכיחו/הפריכו: u, v בהכרח פונקציות קבועות.

(5) (15 נקודות) תהי $f \in \mathcal{O}(D_2(0))$. נניח שעבור סדרה $\{z_n\}$ המתכנסת ל 0 מתקיים: $f(z_n) = \frac{1}{n}$.
 נניח שבנוסף מתקיים: $|f(\frac{i}{2})| = \frac{1}{2} \cdot \sup_{\partial D_1(0)} |f(z)|$. חשבו $\frac{f'(0)}{f(-1)}$. (בפרט הוכיחו: $f(-1) \neq 0$).

(6) (15 נקודות) חשבו $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(i+t)^2 \sin(\frac{i-t}{i+i} - \frac{1}{3})}$.

בהצלחה!