יסודות תורת הפונקציות המרוכבות (201-1-0071), אביב תשע"ז 2016-17: מועד א' - פתרונות

<u>שאלה 1</u>: האם קיימת פונקציה $f \in \mathcal{O}\left(D_1(0)\right)$ המקיימת $\left\{ f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n} \right\}_{n=1,2,\dots}$?
(תנו דוגמא מפורשת או הוכיחו שלא קיימת כזו)

<u>פתרון</u>:

דרך ראשונה לפתרון התרגיל היא (כמו שעשינו לדוגמא בתרגול 7, שאלה 2) להבחין ש- $f\left(\frac{1}{2n}\right) \equiv 0$. כיוון ש- $\frac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \in D_1(0)$ סדרה מתכנסת לגבול בתוך תחום הפונקציה, עקרון היחידות קובע ש- $f(z) \equiv 0$ על כל $D_1(0)$. אבל זה סותר את הנתון $f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{(-1)^n}{2n+1} \neq 0$, ולכן לא יכולה להיות פונקציה כזו.

דרך שונה להתסכל על התרגיל היא להבחין שאם קיימת כזו f אז היא רציפה בראשית, ולכן $f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. אבל אז לא קיים גבול הנגזרת בראשית, למשל לאורך הציר הממשי, כי $\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{2n}\right)-f(0)}{\frac{1}{2n}-0} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$ אבל $\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{4n+1}\right)-f(0)}{\frac{1}{4n+1}-0} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

<u>שגיאות נפוצות</u>:

(i) הרבה סטודנטים הגדירו $g(z) = z\sin\left(\frac{\pi}{2z}\right)$, והבחינו שבכל $z_n = \frac{1}{n}$ מתקיים $f(z_n) = g(z_n)$. כיוון ש- $z_n \to 0 \in D_1(0)$, אותם סטודנטים הסיקו ש- $f(z) \equiv g(z)$, אבל ל- g נק' סינגולרית עיקרית ב- $z = 0$, ולכן גם ל- f, כלומר לא קיימת f כזו.
אבל עצם המסקנה הופכת את השימוש בעקרון היחידות ללא תקין: $z = 0$ אינה בתחום ההולומורפיות של g, אז אי אפשר להשתמש במסקנה הרצויה.
דוגמא: האם קיימת f הולומורפית בדיסק היחידה כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$?
תשובה: לא קיימת. נגדיר $g(z) = e^{2\pi i/z} - 1$; אז לכל $0 < n$ מתקיים $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 = g\left(\frac{1}{n}\right)$, ול- g יש נק' עיקרית ב- $z = 0$, ולכן גם ל- f, בסתירה. (המסקנה שגויה, כמובן; $f(z) \equiv 0$ דווקא כן ממלאת את התנאים.)

(ii) חלק מהסטודנטים זיהו ש- $f\left(\frac{1}{2k+1}\right) = \frac{(-1)^k}{2k+1}$, שאמנם שואף לאפס, אבל "משני צדדים שונים". נטען שזה אומר שהפונקציה לא יכולה להיות רציפה/גזירה בראשית.
אבל זו לא הוכחה; אם הגבול קיים, אז לא ניתן להשתמש בכך שלמדנו שקיום גבולות חלקיים שונים גורר נק' סינגולרית עיקרית. מה שאפשר לעשות, במקרה הספציפי הזה, הוא להשתמש בהגדרת הנגזרת כמו שעשינו בפתרונות שפורסמו: $\frac{f\left(\frac{1}{2k+1}\right)-f(0)}{\frac{1}{2k+1}-0} \equiv (-1)^k$, ולכן לא קיים הגבול כש- $k \to \infty$.

שאלה 2: נגדיר $f \in \mathcal{O}\left(\overline{D_1(0)}\right)$ ע"י $f(z) = \frac{1}{(1+az)^2} + \frac{1}{(1+bz)^2}$. כאן הקבועים מקיימים $|a|, |b| < 1$.
נניח ש- f חסומה על השפה: $|f(z)| \leq 3$ עבור $|z| = 1$. הוכיחו: $\left\{|a^n + b^n| \leq \frac{3}{n+1}\right\}_{n=0,1,2,\ldots}$.

פתרון:

כמו בדף בית 8, תרגיל 4, אפשר להתשמש בנוסחאת קושי כדי לקשר בין הנגזרות של f בראשית ובין ערכיה על שפת הדיסק: לכל $0 \leq n$ מתקיים

$$\left|f^{(n)}(0)\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_{|z|=1} \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}|dz| \leq \frac{n! \cdot 3}{2\pi}\int_{|z|=1}|dz| = n! \cdot 3 \,.$$

כאן פשוט לחשב $f^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot (n+1)! \cdot (a^n + b^n)$, והצבה נותנת $(n+1)|a^n + b^n| \leq 3$, שזה מה שרצינו.

שגיאות נפוצות:

(i) סטודנטים רבים מצאו חסם $|f(z)| \leq C$, והסיקו ש- $C \leq 3$. זה בלבול של כיוון אי-השוויון!

שאלה 3:

א. האם קיימת פונקציה מרומורפית ב- $\bar{\mathbb{C}}$ והולומורפית ב- $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$ המקיימת $|f(z)| \geq \frac{1}{|z|^{\sqrt{2}}}$ ב- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

ב. האם קיימת פונקציה מרומורפית ב- $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ והולומורפית ב- $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$ המקיימת $|f(z)| \geq \frac{1}{|z|^{\sqrt{2}}}$ ב- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

פתרון:

השאלה דומה מאוד למה שעשינו בדף בית 8, תרגילים 1(ג)+(ה):

א. מהנתון מסיקים $f(z) \underset{z \to 0}{\longrightarrow} \infty$ ולכן יש ל- f קוטב ב- $z = 0$. מכאן שאפשר להציג $f(z) = \frac{g(z)}{z^n}$ כאשר g שלמה, $g(0) \neq 0$, ו- n סדר הקוטב של f בראשית.
שימוש חוזר בהנחה מראה לנו ש- $|z|^{n-\sqrt{2}} \leq |g(z)|$, וכיוון ש- g אנליטית בראשית מקבלים ש- $\sqrt{2} \leq n$ (ולמעשה גדול ממש, כי n שלם). אבל עכשיו נקבל ש- $g(z) \underset{z \to \infty}{\longrightarrow} \infty$, ולכן ל- g קוטב באינסוף. לפי דף בית 8 תרגיל 2(א) נקבל ש- g פולינום. אבל g לא מתאפסת (כי $|z|^{n-\sqrt{2}} \leq |g(z)|$ והנחנו ש- $g(0) \neq 0$) ולכן היא קבועה (זה המשפט היסודי של האלגברה: לכל פולינום לא קבוע יש שורש מרוכב); אבל זו סתירה לאי-השוויון $|z|^{n-\sqrt{2}} \leq |g(z)|$! לכן אין פונקציה f כמו שבתנאי השאלה.
(דרך אחרת להראות ש- g קבועה: היא אינה מתאפסת בראשית, ורחוקה מ- 0 בשאר המישור, ולכן התמונה שלה לא צפופה במישור.)

ב. אפשר להסתמך על הסעיף הקודם בפתרון הסעיף הזה: הדבר היחיד שהשתנה בנתונים הוא שלא נתון יותר ש- f מרומורפית בראשית, כלומר עכשיו מרשים נק' סינגולרית עיקרית שם. אבל ממילא מהנתון קיבלנו $f(z) \underset{z \to 0}{\longrightarrow} \infty$, כלומר יש ל- f קוטב בראשית, אז חזרנו לתנאי הסעיף הקודם.

פתרון נוסף לשני הסעיפים יחד, המסתמך רק על הולומורפיות בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, הוצע ע"י סטודנט/ית:
מהנתון אנחנו יודעים ש- $f(z)\neq 0$. לכן $g(z)=\begin{cases}\frac{1}{f(z)} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$ גם כן הולומורפית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$,
מקיימת $|g(z)|\leq |z|^{\sqrt{2}}$, ולכן רציפה בראשית. לכן הראשית היא נק' סליקה ו- g שלמה. עכשיו בדומה למה שעשינו בדף בית 6, שאלה 3, נוסחאת קושי

$$|g''(z_0)| \stackrel{|z_0|<R}{=} \left|\frac{1}{\pi i}\int_{|z|=R}\frac{g(z)}{(z-z_0)^3}dz\right| \leq \frac{2R^{1+\sqrt{2}}}{(R-|z_0|)^3} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

מספיקה כדי לראות ש- $g''(z)\equiv 0$, ולכן $g(z)=az+b$ לאיזה $a,b\in\mathbb{C}$. נבחין כמובן $b=g(0)=0$.
אבל ל- z קטן דיו נקבל $|az|>|z|^{\sqrt{2}}$, בסתירה לנתון. לכן אין פונקציה f כזו.

<u>שגיאות נפוצות:</u>

(i) שלילת הטענה "לכל $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ מתקיים $|f(z)|\leq\frac{1}{|z|^{\sqrt{2}}}$" היא ש"קיים $0\neq z\in\mathbb{C}$ כך ש- $|f(z)|<\frac{1}{|z|^{\sqrt{2}}}$", ולא שהדבר מתקיים לכל $0\neq z\in\mathbb{C}$.

(ii) הפונקציה $z^{\sqrt{2}}$ איננה אלמנטרית. למעשה, לא ברור איך היא מוגדרת. בוודאי שאין פונקציה הולומורפית כזו ב- $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (למעשה, אפשר להגדיר $e^{\sqrt{2}\log(z)}$ בדיוק בתחומים בהם קיים לוג).

<u>שאלה 4:</u> יהיו (u,v) זוג של פונקציות צמודות הרמונית. נניח שמתקיים $-v(x,y)^2\leq u(x,y)\leq v(x,y)^2$ ב- $\mathbb{R}^2$ כולו.
הוכיחו/הפריכו: u,v בהכרח פונקציות קבועות.

<u>פתרון:</u>

כמו שראינו בהרצאות ותרגול 12, צמד פונקציות צמודות הרמונית הן חלק ממשי ומדומה של פונקציה אנליטית; כאן $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ פונקציה שלמה. כאן מתקיים $-\mathrm{Im}(f(z))^2\leq\mathrm{Re}(f(z))\leq\mathrm{Im}(f(z))^2$, ולכן התמונה של f מוכלת בשטח שבין הפרבולות $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -y^2\leq x\leq y^2\}$. זה אומר שתמונת f אינה צפופה, ולכן מליוביל (כמו שראינו בדף בית 8) f קבועה, ומכאן ש- u,v קבועות.

דרך טיפה שונה לסיום התרגיל: מהנתון אם $v=0$ אז $u=0$. לכן תמונת f אינה מכילה את הקרן $(-\infty,0)$; מכאן שהיא גם לא מכילה את הקרן $(-\infty,0]$ (משפט ההעתקה הפתוחה, או פשוט להסתכל על $f(z)-1$ במקום), וראינו בתרגול 6 שאלה 7 שמכאן שהיא קבועה.

<u>שגיאות נפוצות:</u>

(i) במקומות מסויימים סטודנטים "גזרו את אי השוויון" והסיקו ש- (למשל) $u'_x\leq 2vv'_x$ (וגם הכיוון השני). אבל אין שום סיבה שאי שוויון יגרור את אותו אי-השוויון בנגזרות: למשל תמיד מתקיים ש- $\sin x\leq 1\leq 2+\cos x$, אבל אחרי גזירה $\cos x\not\leq-\sin x$ (למשל ל- $x=0$ רואים שלא).

(ii) עוד בעיה שחזרה על עצמה היא שימוש לא נכון בליוביל: אם ידוע ש- f,g שלמות, וש- $|f|\leq|g|$, זה לא אומר ש- "f חסומה ולכן קבועה". להפך, בתרגול 6 שאלה 6 ראינו שזה שקול לכך ש- $f(z)=c\cdot g(z)$ עבור איזה $|c|\leq 1$.

שאלה 5: תהי $f \in \mathcal{O}(D_2(0))$. נניח שעבור סדרה $\{z_n\}$ המתכנסת ל- 0 מתקיים: $f(z_n) = \frac{1}{n}$.
נניח שבנוסף מתקיים $\left|f\left(\frac{i}{2}\right)\right| = \frac{1}{2} \cdot \sup_{\partial D_1(0)} |f(z)|$. חשבו $\frac{f'(0)}{f(-1)}$. (בפרט הוכיחו: $f(-1) \neq 0$.)

פתרון:

התרגיל דומה לדף בית 7, שאלה 2(ב), אם נבחין מההנחה ש- f בפרט רציפה, ולכן $f(0) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$.

דרך אחת לפתרון היא לסמן $C = \sup_{z\in\partial D_1(0)} |f(z)|$ ולהגדיר $g(z) = \frac{1}{C} f(z)$ (שימו לב ש- $C \neq 0$).
עכשיו מקבלים ש- $|g(z)| \leq 1$ ב- $D_1(0)$, $g(0) = 0$ והיא הולומורפית בדיסק היחידה, ולכן $|g(z)| \leq |z|$ מהלמה של שוורץ. יותר מכך, $\left|g\left(\frac{i}{2}\right)\right| = \frac{1}{2} = \left|\frac{i}{2}\right|$ ולכן למת שוורץ אומרת ש- $g(z) = C_2 \cdot z$ לאיזה קבוע $|C_2| = 1$. לסיכום, קיבלנו $f(z) = C_2 C z$, ואפשר לחשב ישירות $\frac{f'(0)}{f(-1)} = -1$.

דרך חלופית לפתרון היא להבחין ש- $h(z) = \frac{f(z)}{z}$ הולומורפית ב- $D_2(0)$ (כי f מתאפסת בראשית), ו- $\left|h\left(\frac{i}{2}\right)\right| = \sup_{z\in\partial D_1(0)} |h(z)|$, ולכן יש לה מקסימום מקומי ב- $z = \frac{i}{2}$, ומעקרון המקסימום היא קבועה $h(z) \equiv C_3$. שוב קיבלנו $f(z) = C_3 z$ (ושוב נבחין $C_3 \neq 0$) ואנחנו מחשבים $\frac{f'(0)}{f(-1)} = -1$.

שגיאות נפוצות:

(i) טענה שחזרה על עצמה היא שאם פונקציה הולומורפית ב- $D_1(0)$ ורציפה על השפה, אז לכל $z \in \partial D_1(0)$ מתקיים $f(z) \neq 0$. זה לא נכון: למשל $f(z) = z(z-1)$ דווקא מתאפסת ב- $z = 1$.

(ii) עוד טעות הייתה **להניח** ש- $z_n = \frac{1}{n}$ ולקבל מיחידות ש- $f(z) = z$ (היו גם סטודנטים שפשוט הניחו את **זה**). כך מגיעים לתשובה המספרית הנכונה, אבל רק כי מניחים מקרה פרטי של הנתונים.

שאלה 6: חשבו $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(i+t)^2 \sin\left(\frac{i-t}{i+t} - \frac{1}{3}\right)}$.

פתרון:

נוח לסמן את העתקת המוביוס $f(z) = \frac{i-t}{i+t}$.
קודם כל נבחין שהאינטגרל מתכנס בהחלט: לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים $|f(t)| = 1$, ולכן $\sin\left(f(t) - \frac{1}{3}\right) \neq 0$.
בנוסף, עבור $|t|$ גדול האינטגרנד מתנהג כמו $\frac{1}{t^2}$.

עכשיו שיודעים ש- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(i+t)^2 \sin\left(\frac{i-t}{i+t} - \frac{1}{3}\right)} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dt}{(i+t)^2 \sin\left(\frac{i-t}{i+t} - \frac{1}{3}\right)}$ פתרון אחד הוא לעבור לאינטגרל מסילתי לאורך מעגל היחידה (כמו בתרגיל בית 9, שאלה 3(א)) ע"י המסילה $\gamma_R : [-R, R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_R(t) = f(t)$; נבחין ש- $\gamma_R'(t) = \frac{-2i}{(i+t)^2}$, וכאשר t נע בין $-\infty$ ל- ∞ לאורך הציר הממשי, $f(t)$ סובבת את מעגל היחידה נגד כיוון השעון. אם כן,

$$\int_{-R}^{R} \frac{dt}{(i+t)^2 \sin\left(\frac{i-t}{i+t} - \frac{1}{3}\right)} = \frac{i}{2} \int_{-R}^{R} \frac{\gamma_R'(t)dt}{\sin\left(\gamma_R(t) - \frac{1}{3}\right)} = \frac{i}{2} \int_{\substack{|z|=1 \\ \arg(z)\in[-\pi+\varepsilon, \pi-\epsilon]}} \frac{dz}{\sin\left(z - \frac{1}{3}\right)}$$

וכאשר $R \to \infty$ מקבלים $\varepsilon \to 0$, והאינטגרל מתכנס ל-

$$\frac{i}{2} \int_{|z|=1} \frac{dz}{\sin\left(z - \frac{1}{3}\right)} = -\pi \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin\left(z - \frac{1}{3}\right)}, \frac{1}{3}\right) = -\pi \left.\frac{1}{\cos\left(z - \frac{1}{3}\right)}\right|_{z=1/3} = -\pi.$$

הערה: בדרך זו התקבלו תשובות שהסתפקו בזהות $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(i+t)^2 \sin\left(\frac{i-t}{i+t} - \frac{1}{3}\right)} = \frac{i}{2} \int_{|z|=1} \frac{dz}{\sin\left(z - \frac{1}{3}\right)}$.

למי שלא הבחין בפרמטריזציה של מעגל היחידה, פתרון שונה ברוח כל האינטגרלים שפתרנו בתרגול 10 (שאלות 3-5) ותרגיל בית 9, שאלה 3(ב), הוא להגדיר כהרגלנו $\alpha_R : [-R, R] \to \mathbb{C}$ ע"י $\alpha_R(t) = t$, ואת חצי המעגל העליון $\beta_R : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $\beta_R(t) = Re^{it}$. אם כן,

$$\int_{-R}^{R} \frac{dt}{(i+t)^2 \sin\left(\frac{i-t}{i+t} - \frac{1}{3}\right)} = \int_{\alpha_R} \frac{dz}{(i+z)^2 \sin\left(\frac{i-z}{i+z} - \frac{1}{3}\right)} =$$

$$= \oint_{\alpha_R+\beta_R} \frac{dz}{(i+z)^2 \sin\left(\frac{i-z}{i+z} - \frac{1}{3}\right)} - \int_{\beta_R} \frac{dz}{(i+z)^2 \sin\left(\frac{i-z}{i+z} - \frac{1}{3}\right)}$$

וחשוב להעיר שהאינטגרל אמיתי לאורך β_R כי כאשר $|z| = R$ אנחנו מקבלים $\left|\frac{i-z}{i+z} + 1\right| \le \frac{2}{R-1}$ קטן כרצוננו, ולכן מרציפות $\left|\sin\left(\frac{i-z}{i+z} - \frac{1}{3}\right) - \sin\left(-\frac{4}{3}\right)\right|$ קטן כרצוננו, והרי $\sin\left(-\frac{4}{3}\right) \neq 0$. לכן יש איזה $R > 0$ וקבוע $C > 0$ כך של- $R \le |z|$ נקבל $C \le \left|\sin\left(\frac{i-z}{i+z} - \frac{1}{3}\right)\right|$.

עכשיו אפשר כרגיל להבחין שהאינטגרל לאורך הקשת העליונה מתאפס כאשר $R \to \infty$ כי

$$\left|\int_{\beta_R} \frac{dz}{(i+z)^2 \sin\left(\frac{i-z}{i+z} - \frac{1}{3}\right)}\right| \le \pi R \cdot \sup_{|z|=R} \left|\frac{1}{(i+z)^2 \sin\left(\frac{i-z}{i+z} - \frac{1}{3}\right)}\right|$$

$$\le \pi R \cdot \frac{1}{\left||z| - |i|\right|^2 \cdot C} = \frac{\pi R}{(R-1)^2 \cdot C} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

לסיום, נותר רק לחשב את האינטגרל הסגור; עבור $0 \le \mathrm{Im}(z)$ אנחנו יודעים ש- $(i+z)^2 \neq 0$, ולכן הנק' הסינגולריות של האינטגרנד הן רק היכן ש- $\sin\left(\frac{i-z}{i+z} - \frac{1}{3}\right) = 0$, כלומר z_k כך ש-

$$\frac{i - z_k}{i + z_k} - \frac{1}{3} = \pi k \iff z_k = \frac{i\left(\pi k + \frac{1}{3}\right) - i}{-\left(\pi k + \frac{1}{3}\right) - 1} = i\left(\frac{2}{\pi k + \frac{4}{3}} - 1\right)$$

עבור $k \in \mathbb{Z}$. מתוכם, לכל $k \neq 0$ נקבל $\mathrm{Im}(z_k) < 0$, ולכן הנקודה הסינגולרית היחידה בתחום ש- $\alpha_R + \beta_R$ מקיפה היא $z_0 = \frac{i}{2}$. נסכם:

$$\oint_{\alpha_R+\beta_R} \frac{dz}{(i+z)^2 \sin\left(\frac{i-z}{i+z} - \frac{1}{3}\right)} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(i+z)^2 \sin\left(\frac{i-z}{i+z} - \frac{1}{3}\right)}, \frac{i}{2}\right)$$

$$= \left.\frac{2\pi i/(i+z)^2}{\cos\left(\frac{i-z}{i+z} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{-2i}{(i+z)^2}}\right|_{z=i/2} = \frac{-\pi}{\cos(0)} = -\pi$$