

יסודות תורת הפונקציות המרוכבות (להנדסה), מועד ב.

אוניברסיטת בן גוריון

<p>כללים: אסור לכתוב בצבע אדום. הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך). בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?", "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".</p>	<p>מספר הקורס: 201.1.0071 מרצה: ד.קרנר מתרגל: י.יחזקאלי תאריך: 10.08.2017 משך המבחן: 3 שעות פתרו את כל השאלות (סה"כ 100 נקודות) הבחינה מותרת לפרסום אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבוני</p>
--	--

יש לנמק היטב את כל התשובות.

(1) (15 נקודות) נניח שפונקציה $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ מקיימת: $|f(z)| \leq |Re(f(z))|$ עבור כל $z \in \mathbb{C}$. האם f בהכרח קבועה?

(2) (15 נקודות) תהי f פונקציה כלשהי. נניח ש $f^{2016}, f^{2017} \in \mathcal{O}(D_1(0))$. האם בהכרח מתקיים: $f \in \mathcal{O}(D_1(0))$?

(3) (15 נקודות) תהי $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ לא קבועה. הוכיחו שעבור כל $r < R$ מתקיים: $\inf_{|z|=r} |e^{f(z)}| > \inf_{|z|=R} |e^{f(z)}|$

(שימו לב שהאי-שוויון הינו חזק)

(4) (א) (5 נקודות) נסחו (בצורה מדויקת) את משפט Rouché.

(ב) (10 נקודות) כמה פתרונות של משוואה $e^z - 1 = z^3 + 7z^2$ נמצאים בתחום $\mathcal{U} = \left\{ \begin{array}{l} -20 < Re(z) < -5, \\ -100 < Im(z) < 100 \end{array} \right\}$?

(5) (20 נקודות) יהי $\gamma \subset \mathbb{C}$ מסלול פשוט וסגור ויהי $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. הוכיחו שעבור כל פונקציה שלמה וכל נקודה $z_0 \in \mathbb{C}$ שלא

שייכת ל γ מתקיים: $\oint_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^n} = \frac{1}{(n-1)!} \oint_{\gamma} \frac{f^{(n-1)}(z)dz}{z-z_0}$ (שימו לב: כאן רשום $f^{(n-1)}(z)$ ולא $f^{(n-1)}(z_0)$).

(6) (20 נקודות) הוכיחו: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t-i)^2 \sin(t-i)} = 0$, כאן t ממשי.

בהצלחה!