יסודות תורת הפונקציות המרוכבות (201-1-0071), אביב תשע"ז 2016-17: מועד ג' - פתרונות

שאלה 1:

א. נסחו בצורה מדויקת את משפט ההצגה האינטגרלית של Cauchy.

ב. תהי $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. נגדיר $c = \sup_{|z|=8} |f(z)|$. הוכיחו: עבור כל $z \in D_4(0)$ מתקיים $|f'(z)| \leq \frac{c}{2}$.

פתרון:

א. יהא $U \subseteq \mathbb{C}$ תחום פשוט קשר, ותהא γ מסילה סגורה פשוטה ב- U בכיוון החיובי. תהא $z \in U$ בפנים של γ, ותהא $f \in \mathcal{O}(U)$. יהא $0 \leq n \in \mathbb{N}$. אזי $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$.

ב. נשתמש בנוסחאת קושי עבור $n = 1$:

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=8} \frac{f(\xi)dz}{(\xi - z)^2} \right| \overset{\text{א"ש המשולש}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \oint_{|\xi|=8} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|^2} |dz|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{|\xi|=8} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|^2} \oint_{|\xi|=8} |dz| \leq \frac{8c}{(8-|z|)^2} \overset{|z|<4}{<} \frac{8c}{4^2} = \frac{c}{2}$$

שאלה 2: האם קיימת פונקציה $f \in \mathcal{O}(D_1(0))$ המקיימת $|f(z)| = e^{|z|}$?

פתרון:

נניח בשלילה שקיימת כזו. אז $|f(z)| > 0$ ולכן $f(z) \neq 0$. כיוון שמהנתון f אינה קבועה, מכאן שניתן להשתמש בעקרון המינימום: לא קיים ל- $|f|$ מינימום מקומי ב- $D_1(0)$. אבל זו סתירה, שכן $|f(0)| = e^0 \overset{\forall z}{\leq} e^{|z|} = |f(z)|$.

שאלה 3: האם קיימת פונקציה קדומה לפונקציה $f(z) = e^{2/z} \cdot \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) + \tan(z) \cdot \cot\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$ בתחום $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{\pi}{2} < |z| < \pi \right\}$?
(רמז: כדאי לחשב שאריות של f בנקודות של $D_\pi(0)$.)

פתרון:

לפי משפט מוררה, אם f הולומורפית בתחום הנתון (והיא בבירור הולומורפית, כהרכבת, סכום וכפל אלמנטריות) ואם כל אינטגרל פשוט סגור בתחום על f מתאפס, אזי קיימת ל- f פונקציה קדומה בתחום. (זה גם תנאי הכרחי, לפי המשפט היסודי, אבל זה לא מעניין בהקשר הזה מלבד שזה נותן מוטיבציה לבדוק אינטגרלים סגורים.)

אם כן, נוכל לחשב כל אינטגרל פשוט סגור לפי משפט השארית, ומכאן שהרמז סביר. נעשה זאת: בדיסק $D_\pi(0)$ (המכיל את התחום שלנו) הפונקציה הולומורפית מלבד נקודה סינגולריות מבודדת ב- $z = 0$ (גם עבור המחובר הראשון וגם עבור cot) וב- $z = \pm\frac{\pi}{2}$ (עבור tan).

ב- $z = 0$ אנו מוצאים של- $\cot\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$ יש קוטב מסדר 1 (אפס פשוט של $\sin\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$), ואילו $\tan(z)$ מתאפס (מסדר ראשון, אבל זה לא משנה), ולכן למחובר השני נקודה סליקה (עם שארית אפס). עבור המחובר הראשון, לשני הגורמים טורי לורן עם חזקות שליליות בלבד, ועבור $\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$ רק חזקות ≤ -2, ולכן גם למכפלה אין גורם עם חזקת -1, כלומר השארית ב- $z = 0$ היא אפס.

ב- $z=\pm\frac{\pi}{2}$ המחובר הראשון כמובן הולומורפי (שארית אפס), ואילו עבור המחובר השני נוכל למצוא

$$\operatorname{Res}\left(\tan(z)\cdot\cot\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right), z=\pm\frac{\pi}{2}\right) = \left.\frac{\sin(z)\cot\left(z/\sqrt{2}\right)}{(\cos z)'}\right|_{z=\pm\pi/2} = \mp\cot\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)$$

אם כן, כל מסילה סגורה פשוטה בתחום $\left\{z\in\mathbb{C}\ \middle|\ \frac{\pi}{2}<|z|<\pi\right\}$ או שאינה מקיפה אף אחת מהנקודות הסינגולריות, או שמקיפה את כולן; כיוון שסכום השאריות אפס, בכל מקרה האינטגרל מתאפס, ולפי מוררה סיימנו (קיימת פונקציה קדומה).

<u>שאלה 4:</u>

א. נסחו בצורה מדויקת את משפט היחידות עבור פונקציות הרמוניות.

ב. הוכיחו שקיימת פונקציה הרמונית $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל x ש- $u(x,0)=\sin(x)$ וכן $u(0,1)=\sqrt{2}$.

<u>פתרון:</u>

א. יהא $U\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום (פתוח) קשיר, ותהא $u:U\to\mathbb{R}$ הרמונית. אם u מוגדרת ורפיצה על ∂U ו- $u\restriction_{\partial U}\equiv 0$, או לחלופין אם קיימת $(x_0,y_0)\in U$ כך שבכל סביבה נקובה שלה u מתאפסת, אזי $u(x,y)\equiv 0$.
(אפשר כמובן לנסח את הדרישה לנקודת הצטברות של אפסים בדרכים שקולות שונות. למשל, דיי--וזה כמובן שקול--להניח ש- $u\restriction_{D_\epsilon(x_0,y_0)}\equiv 0$ לאיזה $0<\epsilon$.)

ב. כיוון שהתחום $\mathbb{R}^2$ הינו פשוט קשר, אנחנו יודעים שאם קיימת כזו u הרי יש לה צמודה הרמונית, כלומר היא חלק ממשי של פונקציה שלמה $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. התנאים על u נותנים לנו שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\operatorname{Re}(f(x))=\sin(x)$ (זה גם שווה ל- $\operatorname{Re}(\sin(x))$, כמובן).
זה רמז להצגה $f(z)=\sin(z)+g(z)$ לאיזו פונקציה שלמה אחרת g. משמעות הנתונים עבורה הם ש- $\operatorname{Re}(g(i))=\sqrt{2}-\operatorname{Re}(\sin(i))=\sqrt{2}$ וגם לכל $x\in\mathbb{R}$, $\operatorname{Re}(g(x))=0$ (כדי לא 'להפריע' למחובר שכבר הוצאנו).
כיוון ש- $\sqrt{2}=\operatorname{Re}\left(-i\sqrt{2}\cdot i\right)$ וגם עבור $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\operatorname{Re}\left(-i\sqrt{2}\cdot x\right)=0$, הרי טבעי לקחת $g(z)=-i\sqrt{2}z$, וקל לוודא כעת שהיא עומדת בדרישות, כלומר דוגמא אפשרית היא $f(z)=\sin(z)-i\sqrt{2}z$. (היא איננה היחידה, ולא ניסינו לטעון זאת.)

<u>שאלה 5</u>: תהי $f\mathcal{O}\left(D_1(0)\right)$. נגדיר פונקציה חדשה ב- $D_1(0)$ ע"י $F(z)=\int_{\gamma_z}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-2)(\xi+2)(\xi-2i)}$, כאשר γ_z הינו עקום (בתוך $D_1(0)$) המחבר את 0 ל- z. האם $F(z)$ תלויה בבחירת העקום? חשבו $\oint_{|z|=0.5}F(z)dz$.

<u>פתרון:</u>

נבחין מהנתון שגם $g(z)=\frac{f(z)}{(z-2)(z+2)(z-2i)}\in\mathcal{O}\left(D_1(0)\right)$, וכיוון שהתחום פשוט קשר אנו יודעים שקיימת לה פונקציה קדומה, כלומר $G:D_1(0)\to\mathbb{C}$ כך ש- $g(z)=G'(z)$.

כעת, לכל γ_z כמתואר בשאלה נקבל מהמשפט היסודי $F(z)=\int_{\gamma_z}G'(\xi)d\xi=G(z)-G(0)$. לפיכך, F אינה תלויה בעקום, אלא רק בנקודת הסיום שלו z. יתר על כן, היא כמובן הולומורפית (כמו G; למעשה הן שוות עד כדי קבוע). משפט קושי-גורסה קובע שאינטגרל סגור על פונקציה הולומורפית בתחום פשוט קשר מתאפס, ובפרט נקבל ש- $\oint_{|z|=0.5}F(z)dz=0$.

<u>שאלה 6</u>: חשבו $\int_\gamma \frac{dz}{(e^{z+1}-1)(z^3-1)}$, כאשר העקום הינו $\gamma = \left\{x+iy \in \mathbb{C} \;\middle|\; x=\frac{1}{2},\ y\in\mathbb{R}\right\}$.

<u>פתרון</u>:

ראשית נבחין מדוע האינטגרל מתכנס. לכל $0 < \mathrm{Re}(z)$ נקבל

$$0 < e-1 \le e^{1+\mathrm{Re}(z)} - 1 = \left|e^{1+z}\right| - 1 \le \left|e^{1+z} - 1\right|$$

ולכן

$$\left|\frac{1}{\left(e^{z+1}-1\right)\left(z^3-1\right)}\right| \le \frac{1}{e-1}\cdot\frac{1}{|z|^3-1}$$

יתר על כן, אם $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}$ הרי $z^3 \neq 1$ (ישנם רק שלושה פתרונות: 1 ו- $e^{\pm i2\pi/3}$), ולכן האינטגרל מתכנס בהחלט ממבחן p, והוא שווה ל- $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{dz}{(e^{z+1}-1)(z^3-1)}$ כאשר $\gamma_R : [-R,R] \to \mathbb{C}$ היא המסילה $\gamma_R(t) = \frac{1}{2} + it$ (הכיוון נבחר שרירותית).

כפי שכבר הבחנו לאינטגרנד יש רק נקודה סינגולרית בודדת בחצי המישור הימני, ב- $z=1$. לכן, עבור $1 < R$ נסגור את המסילה γ_R ע"י חצי הקשת $\alpha_R : \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{C}$ המוגדרת $\alpha_R(t) = Re^{-it}$ (סימן שלילי כדי להתאים למסילה סגורה בשרשור עם γ_R). כבר הבחנו ש- $\sup_{\alpha_R}\left|\frac{1}{(e^{z+1}-1)(z^3-1)}\right| \le \frac{1}{e-1}\cdot\frac{1}{R^3-1}$, וכיוון שאורך α_R הינו πR נקבל מחסם אורך כפול סופרמום (חסם קושי) ש- $\lim_{R\to\infty}\int_{\alpha_R}\frac{dz}{(e^{z+1}-1)(z^3-1)} = 0$.

כדי לסיים את התרגיל, נבחין רק שלכל $1 < R$ מקבלים

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma_R+\alpha_R}\frac{dz}{\left(e^{z+1}-1\right)\left(z^3-1\right)} &= -2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{\left(e^{z+1}-1\right)\left(z^3-1\right)},1\right)\\ &= -2\pi i\left.\frac{1/\left(e^{z+1}-1\right)}{\left(z^3-1\right)'}\right|_{z=1} = \frac{-2\pi i}{3\left(e^2-1\right)}\end{aligned}$$

(המינוס בגלל כיוון המסילה: עם כיוון השעון.)

לסיום, כמובן

$$\begin{aligned}\int_\gamma\frac{dz}{\left(e^{z+1}-1\right)\left(z^3-1\right)} &= \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{dz}{\left(e^{z+1}-1\right)\left(z^3-1\right)}\\ &= \lim_{R\to\infty}\oint_{\gamma_R+\alpha_R}\frac{dz}{\left(e^{z+1}-1\right)\left(z^3-1\right)} = \frac{-2\pi i}{3\left(e^2-1\right)}\end{aligned}$$