

# יסודות תורת הפונקציות המרוכבות (להנדסה), מועד ג.

## אוניברסיטת בן גוריון

<p>כללים: אסור לכתוב בצבע אדום.          הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון,          לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות          ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך).          בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות          לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת          דרך נכונה?", "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?",          "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".</p>	<p>מספר הקורס: 201.1.0071          מרצה: ד.קרנר          מתרגל: י.יחזקאלי          תאריך: 19.09.2017          משך המבחן: 3 שעות          פתרו את כל השאלות          (סה"כ 100 נקודות)          הבחינה מותרת לפרסום          אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבוני</p>
---	--

יש לנמק היטב את כל התשובות.

- (1) (א) (5 נקודות) נסחו בצורה מדויקת את משפט ההצגה האינטגרלית של Cauchy.  
 (ב) (10 נקודות) תהי  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ . נגדיר:  $c = \sup_{|z|=8} |f|$ . הוכיחו: עבור כל  $z \in D_4(0)$  מתקיים  $|f'(z)| \leq \frac{c}{2}$ .

- (2) (15 נקודות) האם קיימת פונקציה  $f \in \mathcal{O}(D_1(0))$  המקיימת  $|f(z)| = e^{|z|}$ ?

- (3) (15 נקודות) האם קיימת פונקציה קדומה לפונקציה  $f(z) = e^{\frac{z}{2}} \cdot \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) + \tan(z) \cdot \operatorname{ctan}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$  בתחום  $\{\frac{\pi}{2} < |z| < \pi\}$ ?  
 (רמז: כדאי לחשב שאריות של  $f$  בנקודות של  $D_\pi(0)$ .)

- (4) (א) (5 נקודות) נסחו בצורה מדויקת את משפט היחידות עבור פונקציות הרמוניות.

- (ב) (10 נקודות) הוכיחו שקיימת פונקציה הרמונית  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{u(x,y)} \mathbb{R}$  המקיימת:  
 $u(x, 0) = \sin(x)$  עבור כל  $x$  ו  $u(0, 1) = \sqrt{2}$ .

- (5) (20 נקודות) תהי  $f \in \mathcal{O}(D_1(0))$ . נגדיר פונקציה חדשה ב  $D_1(0)$  ע"י  $F(z) = \int_{\gamma_z} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-2)(\xi+2)(\xi-2i)}$ , כאשר  $\gamma_z$  הינו עקום  
 (בתוך  $D_1(0)$ ) המחבר 0 ל  $z$ . האם  $F(z)$  תלויה בבחירת העקום? חשבו  $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} F(z)dz$ .

- (6) (20 נקודות) חשבו:  $\int_{\gamma} \frac{dz}{(e^{z+1}-1)(z^3-1)}$ , כאשר העקום הינו:  $\gamma = \{z = x + iy \mid x = \frac{1}{2}\} \subset \mathbb{C}$

בהצלחה!