יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2017 (מרצה: ד.קרנר)

תרגיל בית מס' 0.

התרגיל הנו תרגיל חזרה/רענון על החומר הנלמד בביה"ס ובקורסים חדוו"א2 ואלגברה לינארית.

(1) (א) חשבו i^{97}, i^{4n}, i^{4n+3}, i^n (כאן $n\in\mathbb{Z}$).

(ב) יהי $0\neq z=x+iy\in\mathbb{C}$. בטאו בעזרת x,y את ביטויים הבאים:

i. $Re(\frac{1}{z})$, ii. $Im(\frac{1}{z^2})$, iii. $Re(z^2+z)$, iv. $Re(-iz^2)$.

(ג) הוכיחו: i. $|z|=|\overline{z}|$, ii. $z\overline{z}=|z|^2$, iii. $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$, iv. $|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|)^2$.

(2) (א) הציגו את המספרים הבאים בקואורדינטות קוטביות:

i. -2, ii. $2i$, iii. $-2i$, iv. $1+i$, v. $1-i$, vi. $-1+i\sqrt{3}$, vii. $\sqrt{3}-i$, viii. $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

(ב) מצאו את ההצגה $a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$ עבור ביטויים הבאים:

i. $(1-i)^{105}$, ii. $(2+3i)^{-47}$, iii. $(8+i)^{-152}$, iv. $\sqrt{2-i}$, v. $\sqrt{c+i}$, vi. $\frac{1}{i+\frac{1}{i+\frac{1}{1+i}}}$.

(3) (א) מצאו את $z\in\mathbb{C}$ המקיים $|z|+z=2+i$.

(ב) מצאו $x,y\in\mathbb{R}$ המקיימים: $(2+i)x+(1+2i)y=1-4i$.

(ג) מצאו $x,y\in\mathbb{R}$ המקיימים: $(x+iy)^2=i$.

(ד) הוכיחו כי $x_\pm=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0}}{2}$ הנם פתרונות של המשוואה $x^2+a_1x+a_0=0$. כאן $a_1,a_0\in\mathbb{C}$.

(ה) פתרו את המשוואות: i. $z^4=2-i\sqrt{12}$, ii. $\overline{z}=2-z$, iii. $z^2=\overline{z}$, iv. $|z|+z=1-i$.

(ו) יהי $n\in\mathbb{N}$. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $z^n=1$.

(4) יהיו $z,w\in\mathbb{C}$. הוכיחו או הפריכו (בעזרת דוגמא נגדית):

(א) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$

(ב) $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$

(ג) עבור כל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים: $z^4+4=(z-1-i)(z-1+i)(z+1+i)(z+1-i)$.

(ד) $\overline{z}=z$ אמ"ם $z\in\mathbb{R}$.

(ה) יהיו $a_0,a_1,\dots,a_n,z\in\mathbb{C}$ כך שמתקיים: $\sum_{k=0}^{n}a_kz^k=0$. אזי: $\sum_{k=0}^{n}a_k\overline{z}^k=0$.

(ו) יהיו $z\in\mathbb{C}$, $a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים: $\sum_{k=0}^{n}a_kz^k=0$. אזי: $\sum_{k=0}^{n}a_k\overline{z}^k=0$.

(5) שרטטו את קבוצות הנקודות ב $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ המקיימות את התנאים:

i. $|z|=1$, ii. $|z-1|=2$, iii. $|z-1+2i|=1$, iv. $|z-1|\leq|z-5|$, v. $|z-1|+|z-5|<4$, vi. $z^2+\overline{z}^2=2$, vii. $az+b\overline{z}=c$, viii. $Re\big(z(1-i)\big)<\sqrt{2}$, ix. $|z-i|=|z+i|$.

(6) מצאו את תחומי ההתכנסות במקרים הבאים. בדקו איפה ההתכנסות בהחלט/בתנאי. איפה ההתכנסות היא במ"ש?

i. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln(n)}{n^2}x^n$, ii. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{e^n}{n}+\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{n^2})x^n$, iii. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2sin(x))^n}{n^2+300}$, iv. $\sum_{n=10}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^{n^3}}{n!}$.

(7) פתחו את הפונקציות הבאות לטור טיילור (ליד נקודה $x=0$). מצאו את תחום ההתכנסות של הטור, בדקו איפה ההתכנסות היא בהחלט/בתנאי. איפה ההתכנסות היא במ"ש?

i. $f(x)=ln\frac{1}{6-5x+x^2}$, ii. $f(x)=sin^2(x)$, iii. $f(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}$, iv. $f(x)=sin(1-x)\cdot cos(1+x)$.

(8) עבור פונקציות הבאות בדקו: רציפות, נגזרות חלקיות, רציפות של נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות. (בכל הנקודות)

i. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, ii. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, vii. $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$.

(9) חשבו את האינטגרלים (כיוון המסילה הוא נגד כיוון השעון):

i. $\int_{\{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\}}(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})ds$,

ii. $\int_{(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)}|y|ds$, iii. $\int_{y=a\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}}\frac{ds}{y^2}$, iv. $\oint_{\{x^2+y^2=36\}}\Big((e^{x^2}-x^2y)dx+(xy^2-e^y)dy\Big)$.