



יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2017 (מרצה: ד. קרנר)

תרגיל בית מס' 1.

- (1) (א) הראו שלכל $z, w \in \mathbb{C}$ מתקיים: $|1 - z\bar{w}|^2 + |z + w|^2 = (1 + |z|^2)(1 + |w|^2)$
 (ב) הוכיחו שכל שורשי הפולינום $z^3 + 3z + 5$ נמצאים מחוץ לדיסק $D_1(0)$.
 (ג) הוכיחו/הפריכו (ע"י דוגמא נגדית): i. $|z^n| = |z|^n$ ii. $|Re(z)|, |Im(z)| \leq |z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$.

- (2) (א) בהרצאה הגדרנו e^z עבור $(x, y) \in \mathbb{R}, z = x + iy$ ע"י $e^z := e^x(\cos(y) + i\sin(y))$. הוכיחו:
 i. $e^z e^w = e^{z+w}$ ii. $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ iii. $(e^z)^n = e^{nz}$ iv. $\bar{e^z} = e^{\bar{z}}$ v. $|e^z| = e^x$ vi. $e^{z+2\pi i} = e^z$
 (ב) חשבו $\sum_{k=0}^n e^{ikx}$: הסיקו מכאן: $|\sum_{k=0}^n e^{ikx}| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$ עבור כל $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi\mathbb{Z}\}$ וכל $n \in \mathbb{N}$.
 (ג) בטאו את $\cos(5\alpha), \sin(4\alpha)$ כפולינום ב $\cos(\alpha), \sin(\alpha)$.
 (ד) הוכיחו בעזרת נוסחת Euler את הזהויות הבאות:
 i. $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) = \frac{\sin(\frac{nb}{2})}{\sin(\frac{b}{2})} \cdot \cos(a + (n-1)\frac{b}{2})$ ii. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(a + kb) = 2^n \cos^n(\frac{b}{2}) \cos(a + \frac{nb}{2})$

- (3) ציירו את הקבוצות הבאות: i. $\{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} = \frac{1}{z}\}$ ii. $\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{z}{\bar{z}} = i\}$
 iii. $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + 3z + 3\bar{z} + 10 = 0\}$ iv. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1 - Re(z)\}$

- (4) (א) חשבו: i. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+i)n^2}{n^2+2in\sqrt{2+i}}$ ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\pi in}{4}}$ iii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+e^{it}+\dots+e^{nit}}{n}$ כאן $t \in \mathbb{R}$
 (ב) הוכיחו: i. אם $|z| < 1$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$ ii. אם $|z| > 1$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = \infty$
 (ג) תהי $\{z_n\}$ סדרת נקודות ב \mathbb{C} . הוכיחו: $z_n \rightarrow z$ אם"ם $(Re(z_n), Im(z_n)) \rightarrow (Re(z), Im(z))$.
 (ד) יהי $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ פולינום לא קבוע. הוכיחו: $\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty$.
 (ה) חשבו את הגבולות (אם קיימים): i. $\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}}$ ii. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2-3z}{z^2+1}$

- (5) (א) אילו מבין הקבוצות הבאות הן פתוחות? סגורות? לא פתוחות ולא סגורות? מהם הסגור והפנים של הקבוצות? מהי השפה?
 חסומות? קשירות? קשירות מסילתית? קבוצות פשוט קשר? קומפקטיות?
 i. $\{z \in \mathbb{C} \mid |Re(z)| < 1, Im(z) > -2\}$ ii. $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |Im(z)| \leq |Re(z)|^2\}$ iii. $\{\sqrt{3}z + 2i\bar{z} = 5\}$
 iv. $\{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0, |Im(z)| < |\sin \frac{1}{Re(z)}|\}$ v. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_1(n + in)$ vi. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_{\frac{1}{n}}(\frac{1}{1+in})$
 (ב) הוכיחו: $S \subset \bar{C}$ היא קבוצה פתוחה אם"ם עבור כל $z \in S$ קיים $\epsilon > 0$ מספיק קטן כך ש $D_\epsilon(z) \subset S$.
 (ג) הוכיחו: $S \subset \bar{C}$ היא קבוצה סגורה אם"ם $S = \bar{S}$.