יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2017 (מרצה: ד.קרנר)

תרגיל בית מס' 10.

(1) (א) חשבו אינטגרלים: i. $\int\limits_0^\infty \frac{x\sin(x)}{x^2+a^2}dx$, $a>0$, ii. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$, iii. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx$.
כאן ניתן להשתמש או בהצגה $\frac{\sin(x)}{x} = Im(\frac{e^{ix}-1}{x})$ או במסלול $(-\infty,\epsilon,i\epsilon,\epsilon,\infty)$.

(ב) נזכיר כי התמרת פורייה של f מוגדרת ע"י $\hat{f}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}dx$. מצאו את התמרת פורייה של
i. $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$, ii. $f(x)=\frac{1}{1+x^{2n}}$, $n\in\mathbb{Z}_{>0}$. (האם התשובה תלויה בסימן של t?)
iii. $f(x)=e^{-x^2}$ כאן התבוננו במלבן עם קודקודים $\{-R,R,R+ai,-R+ai\}$ עבור $a\in\mathbb{R}_{>0}$ המתאים.

(ג) תזכורת: <u>התמרת לפלס</u> $(Laplace\ transform)$ של פונקציה f מוגדרת ע"י $\mathfrak{L}(f)(s)=\int\limits_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$. התמרת לפלס הפוכה של $F(s)$ מוגדרת ע"י $\mathfrak{L}^{-1}(F)(x)=\frac{1}{2\pi i}\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{\lambda-it}^{\lambda+it}F(s)e^{sx}ds$, כאשר $\lambda\in\mathbb{R}$ הינו קבוע כך שכל הנקודות הסינגלוריות של $F(s)$ נמצאות משמאל לישר $Re(z)=\lambda$. (אינטגרל זה נקרא $Bromwich\ integral$ או $Fourier-Mellin\ integral$) חשבו $\mathfrak{L}^{-1}(F)$ עבור פונקציות הבאות: i. $F(s)=\frac{1}{(a+s)^n}$, ii. $F(s)=\frac{1}{s^2-a^2}$.

(2) (א) (i) כמה פתרונות יש למשוואה $z^7-2z^5+6z^3+1=0$ ב $D_1(0)$?
(ii) כמה פתרונות יש למשוואה $z^4+z^3-4z+1=0$ ב $\{z|\ 1<|z|<3\}$?
(iii) תהי $D_2(0)\xrightarrow{f}D_1(0)$ פונקציה הולומורפית. כמה פתרונות יש למשוואה $f(z)=z^n$ ב $D_2(0)$?
(iv) יהי $p(z)$ פולינום מדרגה n. חשבו $\lim\limits_{R\to\infty}\oint\limits_{|z|=R}\frac{p'(z)}{p(z)}dz$.

(ב) תהי f פונקציה מרומורפית עם אפסים בנקודות $a_1,\ldots,a_k$, מסדרים $n_1,\ldots,n_k$, ועם קטבים בנקודות $b_1,\ldots,b_l$ מסדרים $m_1,\ldots,m_l$. תהי $g\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ ותהי $\gamma\subset\mathbb{C}$ מסילה פשוטה המקיפה את כל הקטבים והאפסים של f.
הוכיחו את ההכללה הבאה של עקרון הארגומנט: $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum\limits_{j=1}^k n_jg(a_j)-\sum\limits_{j=1}^l m_jg(b_j)$.

(ג) תהיינה $f,g\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$. הוכיחו: $f^2+g^2\equiv 1$ אמ"מ קיימת פונקציה שלמה $\phi(z)$ כך ש $g(z)=sin(\phi(z))$, $f(z)=cos(\phi(z))$. (רמז: הראו תחילה שקיימת $h\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ כך ש $f(z)+ig(z)=e^{h(z)}$.)

<u>שאלות חזרה</u>

(3) תהי $f\in\mathcal{O}(\mathcal{U})$ ונניח שעבור נקודה $a\in\mathcal{U}$ מתקיים: $ord_a(f)=n$. הוכיחו שקיימת $g\in\mathcal{O}(D_\epsilon(a))$, עבור $\epsilon>0$ מספיק קטן, המקיימת: $g^n(z)=f(z)$ ב $D_\epsilon(a)$.

(4) תהי $f\in\mathcal{O}(\mathcal{U})$. נגדיר את הפיתוח טיילור שלה בנקודה z_0 כ $f(z)=\sum c_{n,z_0}(z-z_0)^n$. נניח שעבור כל נקודה z_0 מתקיים: $c_{n,z_0}=0$ עבור n מסויים. הוכיחו ש f הינה פולינום.

(5) בתרגיל זה נראה הוכחה נוספת של משפט Liouville. תהי $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ פונקציה חסומה.
(א) בהינתן $a,b\in\mathbb{C}$ נקודות זרות, חשבו $\int\limits_{|z|=R}\frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}$, כאן $R>max(|a|,|b|)$.
(ב) מבלי להשתמש בסעיף (א), הוכיחו: $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{|z|=R}\frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}=0$. הסיקו את המשפט.

(6) חשבו $\int\limits_\gamma\left(e^{1/\bar{z}}+e^{-1/\bar{z}}\right)dz$ כאשר $\gamma=\{re^{it}|\ t\in[0,\pi]\}$.

(7) נניח ש $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ מקיימת: $f(it)=f(it+i\sqrt{2})=f(it+i)$ עבור כל $t\in\mathbb{R}$. מצאו את f.

(8) תהי $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ ונניח ש: $\lim\limits_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(-\frac{1}{n})=-1$. הוכיחו: עבור כל קבוע $c\in\mathbb{C}$ קיימת סדרת נקודות $\{z_n\}\to 0$ כך ש $|\lim\limits_{n\to\infty}(f(z_n))-c|<1$.

(9) (א) האם קיים טור $\sum_{n=0}^\infty a_nz^n$ המקיים: רדיוס ההתכנסות שלו r והטור מתכנס ב $\overline{D_r(0)}$ כולו?
(ב) האם קיים טור $\sum_{n=0}^\infty a_nz^n$ המקיים: רדיוס ההתכנסות שלו r והטור לא מתכנס באף נקודה של $\partial D_r(0)$?
(ג) נניח שעבור $f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_nz^n$ מתקיים: $lim\ sup\ \sqrt[n]{|a_n|}<1$. חשבו $\int\limits_{|z|=1}f(z)dz$.

(10) תהי f מרומורפית ב $\mathcal{U}$. נניח שסדרת קטבים של f מתכנסת לנקודה $a\in\partial\mathcal{U}$. האם a לא נקודה סליקה ולא קוטב?