יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2017 (מרצה: ד.קרנר)

תרגיל בית מס' 11.

(1) (א) מצאו את האינדקס של מסילות הבאות, ביחס לראשית:

i. $\{|z|=1\} \xrightarrow{sin(z)} \mathbb{C}$, ii. $\{|z|=10\} \xrightarrow{sin(z)} \mathbb{C}$, iii. $\{|z|=4\pi+\frac{\pi}{4}\} \xrightarrow{\frac{cos(z)}{sin^2(z)}} \mathbb{C}$.

(ב) נגדיר מסילה $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$ כאשר $\gamma_1(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, $\gamma_2(t)=-1+2e^{-2it}$, $t\in[0,2\pi]$, $\gamma_3(t)=1-i+e^{it}$, $t\in[\frac{\pi}{2},\frac{9\pi}{2}]$. חשבו את אינדקס $\eta(\gamma,z)$ עבור כל $z\in\mathbb{C}\setminus\gamma$.

(ג) תהי $f(z)=e^{-z}-a_0-a_1z$, $a_0>1$, $a_1\geq 0$. מצאו את האינדקס של מסילה $\partial\mathcal{U}\xrightarrow{f}\mathbb{C}$. כאן $\mathcal{U}\subset\{z|\ Re(z)>0\}$ תחום חסום כלשהו.

(ד) נגדיר $\mathbb{C}\xrightarrow{\gamma}[0,2\pi]$ ע"י $\gamma(t)=\frac{\Big((cos(2t)-cos(t))+i(sin(2t)-sin(t))+0.25\Big)e^{\frac{cos(t)-2-isin(t)}{5-4cos(t)}}}{\frac{1}{2}sin\Big(cos(t)+isin(t)\Big)-isin(t)-cos(t)}$. כמה פעמים γ מקיפה את הראשית? (הדרכה: מצאו פונקציה f כך ש $\gamma(t)=f(e^{it})$. בטאו את אינדקס $\eta(\gamma,0)$ בעזרת f.)

(2) תהי f מרומורפית ב $\mathbb{C}$, כך שכל האפסים וקטבים שלה נמצאים בתוך $D_r(z_0)$. הוכיחו:

i. קיימת פונקציה $h\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\overline{D_r(z_0)})$ המקיימת $f(z)=e^{h(z)}$ אמ"מ

ii. מספר האפסים של f ב $D_r(z_0)$ שווה למספר הקטבים (כולל ריבויים).

(3) (א) תהי $f\in\mathcal{O}(\mathcal{U})$ ונניח ש $z_0\in\mathcal{U}$ הינו אפס מסדר $n>1$ של f.
הוכיחו ש f לא חח"ע בכל דיסק מנוקב $D_\epsilon(z_0)$.

(ב) תהי $f\in\mathcal{O}(\mathcal{U}\setminus\{z_0\})$ ונניח ש $z_0\in\mathcal{U}$ הינו קוטב מסדר $n>1$ של f. הוכיחו ש f לא חח"ע בכל דיסק $D_\epsilon(z_0)\setminus\{z_0\}$.

(4) ניקח סדרה $\{f_n\in\mathcal{O}(\mathcal{U})\}_{n\in\mathbb{N}}$ שמתכנסת במ"ש, $f_n\rightrightarrows f$. נניח שכל f_n הינה חח"ע ב $\mathcal{U}$.
הוכיחו: או $f=const$ ב $\mathcal{U}$ או f הינה חח"ע ב $\mathcal{U}$. (רמז: משפט Hurwitz)

<u>שאלות חזרה</u>

(5) (א) תהי $f\in\mathcal{O}(D_{\frac{3}{2}}(0))$. הוכיחו שקיים $n\in\mathbb{N}$ כך שמתקיים: $f(\frac{1}{n})\neq\frac{1}{n+1}$.

(ב) נניח ש $f\in\mathcal{O}(D_1(0))$ מקיימת: $f(\frac{1}{2n})=f(\frac{1}{2n+1})$ עבור כל $n\in\mathbb{N}$. הוכיחו ש f קבועה.

(ג) תהי $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ לא קבועה ומקיימת: $f(z)=f(\lambda z)$ עבור כל $z\in\mathbb{C}$. מה הערכים האפשריים של λ?

(6) תהי $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ המקיימת: $|f|\leq 1$. הוכיחו $|\oint\limits_{|z|=1} f(z)dz|\leq 4$.

(7) יהי $\mathcal{U}\subset\mathbb{C}$ ריבוע עם מרכז בראשית וצלעות l_1,l_2,l_3,l_4. תהי $f\in\mathcal{O}(\mathcal{U})$ רציפה ב $\overline{\mathcal{U}}$. נניח ש $\{|f|_{l_i}|\leq m_i\}_{i=1..4}$.
הוכיחו: $|f(0)|\leq\frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{4}$. (רמז: הגדירו פונקצית עזר עם חסם אחיד על הצלעות.)

(8) יהי תחום חסום ותהי $f\in\mathcal{O}(\mathcal{U})$ ורציפה ב $\overline{\mathcal{U}}$. ניקח פולינום $p(z)=\prod\limits_{j=1}^{n}(z-z_j)$, שכל השורשים שלו פשוטים ונמצאים ב $\mathcal{U}$. נגדיר $g(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\mathcal{U}}\frac{f(w)}{p(w)}\frac{p(w)-p(z)}{w-z}dw$. הוכיחו: $g(z)$ הינו פולינום המקיים: $\{g(z_j)=f(z_j)\}$.

(9) (רשות) יהי $p(z)$ פולינום עם שורשים פשוטים $z_1,\ldots,z_n$. הוכיחו: $p'(z)$ לא מתאפס מחוץ לקמור $Conv(z_1,\ldots,z_n)$.
(הדרכה: בטאו את המנה $\frac{p'(z)}{p(z)}$ כסכום של ביטויים $\{\frac{1}{z-z_j}\}$. הציגו אותם כ $\{\frac{\overline{z}-\overline{z}_j}{|z-z_j|^2}\}$. תחשבו על $\{\overline{z}-\overline{z}_j\}$ כווקטורים ב $\mathbb{R}^2$. בדקו את הכיוונים שלהם.) לטענה זו קוראים משפט Gauß-Lucas , היא מכלילה את משפט Rolle של חדוו"א 1.