יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2017 (מרצה: ד.קרנר)

תרגיל בית מס' 12.

(1) (א) תהי $f=u+iv\in\mathcal{O}(\mathcal{U})$. הוכיחו $u\cdot v, u, v\in Har(\mathcal{U})$.
מתי מתקיים גם $u^2\in Har(\mathcal{U})$? $\frac{1}{u}\in Har(\mathcal{U})$?

(ב) הוכיחו: אם $u=Re(f)$ עבור $f\in\mathcal{O}(\mathcal{U})$ אז מתקיים $f'(z)=\partial_x u-i\partial_y u$.

(ג) הוכיחו: אם $u\in Har(\mathcal{U})$ אז $\partial_x u-i\partial_y u\in\mathcal{O}(\mathcal{U})$. (כאן $\mathcal{U}$ לא בהכרח תחום פשוט קשר.)

(ד) בדקו שפונקציות הבאות הן הרמוניות בתחום $\mathcal{U}\subset\mathbb{C}$ ומצאו צמודה הרמונית:

i. $u(x,y)=sinh(x)sin(y)$, $\mathcal{U}=\mathbb{C}$, ii. $u(x,y)=e^{x^2-y^2}cos(2xy)$, $\mathcal{U}=\mathbb{C}$,

iii. $u(x,y)=x-e^x sin(y)$, $\mathcal{U}=\mathbb{C}$, iv. $u(x,y)=ycos(y)sinh(x)+xsin(y)cosh(x)$, $\mathcal{U}=\mathbb{C}$,

v. $u(x,y)=\frac{x}{2}ln\big((x+2)^2+y^2\big)-y\cdot arctan\frac{y}{x+2}$, $\mathcal{U}=\{(x,y)|\ 0<x<1,\ 0<y<1\}$.

(ה) הראו ש $u(x,y)=\frac{1}{2}log(x^2+y^2)$ הינה הרמונית ב $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. הראו כי ל u אין צמודה הרמונית ב $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(ו) תהי $u\in Har(D_r(0))$. הוכיחו שצמודה הרמונית שלה ניתנת ע"י $v(x,y)=\int\limits_0^y\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dt+\int\limits_0^x-\frac{\partial u}{\partial y}(s,y)ds$.

(ז) יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש $a<b$. נסמן $H^+=\{z|\ Im(z)>0\}$ ונגדיר $H^+\xrightarrow{u}\mathbb{R}$ באופן הבא: $u(z)$ הינה הזווית azb בתוך $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ (ברדיאנים). הראו ש u הרמונית. (רמז: תמצאו $f\in\mathcal{O}(H^+)$ כך ש $u(z)=Re(f(z))$.)

(2) (א) בדקו ש $u(x,y)=sin\big(Re(e^z+z^3)\big)e^{Im(e^z+z^3)}$ הינה פונקציה הרמונית (מהי הצמודה שלה?)

(ב) תהיינה u, v הרמוניות צמודות בתחום $\mathcal{U}$. הראו שגם $F(x,y)=e^{-uv}cos(\frac{u^2-v^2}{2})$, $G(x,y)=e^{-uv}sin(\frac{u^2-v^2}{2})$ פונקציות הרמוניות צמודות ב $\mathcal{U}$.

(ג) תהי $f=u+iv\in\mathcal{O}(\mathcal{U})$ שלא מתאפסת באף נקודה של $\mathcal{U}$. הראו שפונקציה $h=\frac{u\partial_x u+v\partial_x v}{u^2+v^2}$ הינה הרמונית ב $\mathcal{U}$.

(ד) תהיינה u, v הרמוניות צמודות בתחום $\mathcal{U}$. הראו שגם $U=\frac{v}{u^2+v^2}$ הרמונית ומצאו צמודה הרמונית שלה.

(3) (א) הוכיחו את הנוסחה לאופרטור לפלס (Laplace) בקואורדינטות קוטביות: $\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$.

(ב) תהי $u\in Har(\mathcal{U})$ ונניח ש u מהצורה $u=u(|z-z_0|)$. (כלומר קיימת פונקציה $\mathbb{R}\xrightarrow{h}\mathbb{R}$ גזירה פעמים ברציפות, כך ש $u(z)=h(|z-z_0|)$.) מהי u?

(ג) בדקו שפונקציה $u(r,\theta)=r\theta cos(\theta)+rsin(\theta)log(r)$, $\mathcal{U}=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leq 0}$ הינה הרמונית ומצאו את הצמודה שלה.

(4) (א) הוכיחו שכל פונקציה הרמונית גזירה אינסוף פעמים.

(ב) הוכיחו שלפונקציה הרמונית אין אפסים מבודדים.

(ג) הוכיחו: אם u הרמונית ב $\mathbb{C}$ כולו וחסומה, מלעיל או מלרע, אז u קבועה.

(ד) תהי u הרמונית ב $\mathbb{C}$ כולו ולא מתאפסת באף נקודה. הוכיחו ש u קבועה.

(ה) נניח ש $u_1,u_2\in Har(\mathcal{U})$, עבור תחום קשיר, ועבור דיסק מסוים $\overline{D_r(z_0)}\subset\mathcal{U}$ מתקיים $u_1|_{\partial D_r(z_0)}=u_2|_{\partial D_r(z_0)}$.
הוכיחו: $u_1=u_2$ על $\mathcal{U}$

(5) (א) תהי $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ המקיימת: $\lim\limits_{z\to\infty}z\cdot Re(f(z))=0$. הוכיחו: f הינה קבועה.
(הראו שזה נובע ממשפט Liouville וגם מנוסחת Schwartz.)

(ב) תהי $u(x,y)=e^x cos(y)+x$. מצאו את $\max(u)$ בתחום $\{z|\ 0\leq Re(z)\leq Im(z)\leq\frac{\pi}{4}\}$.

(ג) תהי $\mathbb{R}\xrightarrow{h}\mathbb{R}$ רציפה וחסומה. נגדיר $u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y\cdot h(t)dt}{(x-t)^2+y^2}$. הוכיחו: $u\in Har\big(\{z|\ Im(z)>0\}\big)$.

(ד) תהי $f\in\mathcal{O}(D_1(0))$ ורציפה ב $\overline{D_1}(0)$. עבור כל $0\neq w\in D_1(0)$ הוכיחו: $2\pi if(w)=\oint\limits_{|z|=1}\frac{f(z)dz}{z-w}-\oint\limits_{|z|=1}\frac{f(z)dz}{z-\frac{1}{\overline{w}}}$

מכאן הסיקו נוסחת Poisson .

שאלות חזרה

(6) מצאו את מספר האפסים של $f(z)=z^4+8z^3+3z^2+8z+3$ בתחום $\{z|\ Re(z)>0\}$. (הדרכה: נגדיר מסילה סגורה $[iR,-iR]\cup\Gamma_R$, כאשר Γ_R= חצי מעגל העובר דרך הנקודות $-iR, R, iR$. השתמשו בעקרון הארגומנט עבור $f(z)$ בתוך המסילה ובדקו את הגבול $R\to\infty$. שימו לב שהפולינום z^4+3z^2+3 לא מתאפס עבור $z\in i\mathbb{R}$.)

(7) תהי $g\in\mathcal{O}(\mathcal{U}\setminus\{z_0\})$ ונניח ש z_0 נקודה סינגולרית עיקרית. תהי $const\neq f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$. מיינו את סוג הנקודה z_0 עבור $f(g(z))$.

(8) יהי D משולש שווה צלעות, עם קודקודים a,b,c. נגדיר $f(z)=|(z-a)(z-b)(z-c)|$. מצאו את $\max\limits_{z\in\overline{D}}(f(z))$.
(רמז: את התנאי $z\in[a,b]$ כדאי לנסח בצורה $z=a(\frac{1}{2}+t)+b(\frac{1}{2}-t)$, $t\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.)