יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2017 (מרצה: ד.קרנר. רוב תודות למתרגל י.יחזקאלי)

תרגיל בית מס' 13.

(1) (א) נגדיר $f(z)=\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ וגם $g(z)=\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$. הוכיחו: $f(g(z))=\frac{a_3z+b_3}{c_3z+d_3}$
כאשר $\begin{pmatrix}a_3 & b_3\\ c_3 & d_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}$.
הסיקו מכאן: העתקה $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ הפיכה אמ"מ $ad\neq bc$. רשמו את הביטוי עבור f^{-1}.

(ב) נגדיר $T(z)=\frac{z}{3z+1}$, $S(z)=\frac{2z-1}{z-3i}$. חשבו: i. $T\circ S$, ii. $S\circ T$, iii. $S^{-1}\circ T\circ S$.

(ג) נגדיר העתקות בסיסיות: מתיחה ($z\xrightarrow{S_\lambda}\lambda z$), הזזה ($z\xrightarrow{T_a}z+a$), הפיכה ($z\xrightarrow{Inv}\frac{1}{z}$). הוכיחו שכל העתקה $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, $c\neq 0$ ניתנת להצגה כהרכבה של העתקות: $T_\gamma\circ S_\beta\circ Inv\circ T_\lambda$. הוכיחו שהעתקות Möbius ששולחות את 0 ל ∞ הן בדיוק מהצורה $T_\gamma\circ S_\beta\circ Inv$. מה התכונה המאפיינת של העתקות מהצורה $S_\gamma\circ Inv\circ T_\beta$?

(ד) הוכיחו שהעתקה $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ שולחת מעגלים וישרים למעגלים וישרים.
(רמז: ניתן להשתמש בהצגה כללית של ישרים/מעגלים, $pz\bar{z}+qz+r\bar{z}+s=0$. שימו לב: כאן $p,q,r,s\in\mathbb{R}$)

(ה) מצאו את כל נקודות השבת של העתקה $z\to\frac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d\in\mathbb{C}$.

(2) (א) תהי $f(z)$ העתקת Möbius . הוכיחו: ישר $l\subset\bar{\mathbb{C}}$ נשלח לישר (אחר) אמ"מ $f(a)=\infty$ עבור נקודה מסוימת $a\in l$.
(ומה קורה אם אין נקודה כזו?) הוכיחו:מעגל $S^1\subset\mathbb{C}$ נשלח למעגל (אחר) אמ"מ $f(a)\neq\infty$ עבור כל $a\in S^1$.

(ב) נגדיר העתקה $z\to\frac{1}{z}$. תארו את תמונות הקבוצות $\{z|\ |z|^2=a\cdot Re(z)\}$, $\{z|\ Im(z)=Re(z)+b\}$.

(ג) עבור אילו ערכים של a העתקה $f(z)=\frac{z-3}{1-2z}$ שולחת את $\partial D_1(a)$ לקו ישר?

(ד) תהי f העתקת Möbius המקיימת $f(\bar{\mathbb{R}})=\bar{\mathbb{R}}$. הוכיחו שניתן להציגה בצורה $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, כאשר $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

(ה) תארו את כל העתקות Möbius המקיימות $f(\partial D_1(0))=\partial D_1(0)$.

(ו) נגדיר $f(z)=\frac{2z+i}{2+iz}$ ונסמן $D^+=\{z|\ |z|<1,\ Im(z)>0\}$. ציירו את הקבוצה $f(D^+)\subseteq\bar{\mathbb{C}}$.

(ז) נסמן $Q_1=\{z|\ Im(z)>0,\ Re(z)>0\}$ ויהי D^+ כמו בשאלה הקודמת. מצאו את העתקת מיוביוס המקיימת: $f(D^+)=Q_1$.

(ח) הראו שלכל $|a|<R$ העתקה $f(z)=\frac{R(z-a)}{R^2-\bar{a}z}$ מקיימת: $f(D_R(0))=D_1(0)$, $f(a)=0$.

(3) (א) הוכיחו: כל העתקה אנליטית, עם נגזרת לא מתאפסת, הינה העתקה קונפורמית (כלומר שומרת על זויות).

(ב) תהי $\mathbb{C}\xrightarrow{\phi}\mathbb{C}$ העתקה (לא בהכרח אנליטית) ששומרת מרחקים, כלומר $|\phi(z_1)-\phi(z_2)|=|z_1-z_2|$. הוכיחו שהעתקה היא $\phi(z)=e^{i\theta}z+z_0$ או $\phi(z)=e^{i\theta}\bar{z}+z_0$. (רמז: הזזות וסיבובים שומרים מרחקים. לכן ניתן להניח: $\phi(0)=0$, $\phi(1)=1$. מכאן ניתן לקבל: ϕ פועלת כזהות על ציר ממשי. לכן $\phi(i)=\pm i$.)

(ג) בסעיפים הבאים בדקו האם קיימת העתקת מיוביוס המעבירה את התחום הראשון לשני.
אם קיימת - מצאו כזו, אם לא - הסבירו למה
i. $D_1(0)\to\{z|\ Im(z)>Re(z)\}$, ii. $D_1(1+i)\cup D_1(-1-i)\to\{z|\ Re(z)>0\}$,
iii. $D_1(1+i)\cup D_1(-1-i)\to\{z|\ |Re(z)|>1\}$, iv. $D_1(0)\to\bar{\mathbb{C}}$, v. $D_1(0)\to\mathbb{C}$,
vi. $\mathbb{C}\to\bar{\mathbb{C}}$, vii. תחום $D_2(1+i)\cup D_2(-1+i)\cup D_2(i(1-\sqrt{3}))$
לתחום $\{z|\ Im(z)>0,\ Im(z)+Re(z)<1,\ Im(z)-Re(z)<1\}$.

(4) נקבע $\mathcal{U}=\{Im(z)>0\}$ תהי $f\in\mathcal{O}(\mathcal{U})$ רציפה ב $\overline{\mathcal{U}}$. נניח ש $|f|_{\partial\mathcal{U}}|\le 1$, הגבול $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$ סופי, ו $f(i)=0$.
הוכיחו: $|f(z)|\le|\frac{z-i}{z+i}|$ ב $\mathcal{U}$.

<u>שאלות חזרה</u>

(5) נניח ש $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ מקיימת: $|f(z)|\neq 1$ עבור כל $z\in\mathbb{C}$. האם f בהכרח קבועה? (רמז: קשירות)

(6) נניח שפונקציה רציונלית $\frac{p(z)}{q(z)}$ מקבלת רק ערכים ממשיים במעגל $\partial D_1(0)$. מה ניתן להגיד על האפסים/קטבים שלה ?

(7) (א) תהי $D_1(0)\xrightarrow{f}D_1(0)$ אנליטית. נניח שמתקיים: $f(a)=0$, עבור $a\in D_1(0)$. הוכיחו שמתקיים $|f(z)|\le\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|$.

(ב) תהי $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ המקיימת: $|f|_{|z|=1}|=1$. הוכיחו: $f(z)=c\prod\left|\frac{z-a_i}{1-\bar{a}_iz}\right|$, כאן $\{a_i\in D_1(0)\}$ נקודות לא בהכרח שונות ו $|c|=1$.

(8) חשבו $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+k)!}$ עבור $k=1,2,3,4$.

(9) נסמן את רדיוס ההתכנסות של טור $\sum a_nz^n$ ע"י R. נניח ש $\{a_n\neq 0\}$ וקיים הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.
מצאו את רדיוס ההתכנסות של $\sum\frac{z^n}{a_n}$.