יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2017 (מרצה: ד.קרנר)

תרגיל בית מס' 2.

(1) (א) הוכיחו: $\mathcal{U} \overset{f=u+iv}{\to} \mathbb{C}$ פונקציה רציפה אמ"ם u, v רציפות.

(ב) נגדיר f בקואורדינטות קוטביות, $\theta \in (0, 2\pi]$, ע"י $f(z) = \begin{cases} \frac{r}{\theta}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$.

האם $f(z)$ רציפה לאורך כל ישר (ממשי) דרך 0? האם $f(z)$ רציפה ב 0?

(2) (א) אילו מבין פונקציות הבאות מקיימות תנאי Cauchy-Riemann? באילו נקודות? (כאן $z = x + iy$)

i. $f(z) = \frac{iz+2}{2i-z}$, ii. $f(z) = \frac{1}{Im(z)+i}$, iii. $f(z) = x^2 - y^2 - 2ixy$,

iv. $f(z) = log(x^2+y^2) + 2i \cdot artcan\frac{y}{x}$.

(ב) עבור אילו $a, b \in \mathbb{C}$ פונקציה $f(z) = a \cdot Re(z) + b \cdot Im(z)$ הינה הולומורפית?

(ג) אילו מבין פונקציות הבאות הן פונקציות הולומורפיות? (באילו תחומים?)

i. $f(z) = e^{-x}e^{-iy}$, ii. $f(z) = \frac{ix+1}{y}$, iii. $f(z) = e^x\big(cos(x) + isin(y)\big)$, iv. $f(z) = z \cdot Re(z)$,

iv. $f(z) = z^2 - \overline{z}^2$, v. $f(z) = cos(x) \cdot cosh(y) - isin(x) \cdot sinh(y)$.

(ד) הוכיחו: $\partial_x f = \lim\limits_{\mathbb{R}\ni\epsilon\to 0} \frac{f(z+\epsilon)-f(z)}{\epsilon}$, $\partial_y f = \lim\limits_{\mathbb{R}\ni\epsilon\to 0} \frac{f(z+i\epsilon)-f(z)}{\epsilon}$,

(ה) הוכיחו: $f(z)$ הולומורפית בתחום סימטרי אמ"ם $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$ הולומורפית בו. (תחום נקרא סימטרי אם $\bar{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$.)

(ו) קבלו הצגה קוטבית של משוואות Cauchy-Riemann: $\frac{\partial f}{\partial \phi} = ir\frac{\partial f}{\partial r}$.

או, עבור $f = u + iv$: $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$, $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$.

(ז) האם פונקציות הבאות מקיימות משוואות Cauchy-Riemann ? באיזה תחום?

i. $f(re^{it}) = r^2cos(2t) - irsin(2t)$, ii. $f(re^{it}) = \frac{1}{r^2}(cos(2t) - isin(2t))$.

(3) בהרצאה הגדרנו $e^{x+iy} := e^x\big(cos(y) + isin(y)\big)$.

(א) בדקו ש e^z הינה פונקציה הולומורפית וחשבו את נגזרתה.

(ב) ציירו את התמונה ע"י $exp(z)$ של קבוצות הבאות: i. $\{z|\ Im(z) = 0\}$, ii. $\{z|\ Re(z) = 0\}$,

iii. ישר ב $\mathbb{C}$ העובר דרך 0, iv. ישר כלשהו ב $\mathbb{C}$.

(ג) מצאו את כל הפתרונות של המשוואות: i. $e^z = 1$, ii. $e^z = i$, iii. $e^z = -3$, iv. $e^z = 1 + i$.

(4) נגדיר $cos(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$, $sin(z) = \frac{e^z-e^{-z}}{2i}$. בדקו: $e^z = cos(z) + i \cdot sin(z)$.

(א) הוכיחו שהפונקציות הולומורפיות ומתקיים: $cos'(z) = -sin(z)$, $sin'(z) = cos(z)$,

$cos(z+2\pi) = -cos(z+\pi) = cos(z)$, $sin(z+\frac{\pi}{2}) = cos(z)$.

(ב) קבלו את הנוסחאות עבור $sin(a+b) = \cdots$, $cos(a+b) = \cdots$, $sin(2z) = \cdots$, $cos(2z) = \cdots$.

(ג) הוכיחו $sin(x+iy) = cos(x) \cdot cosh(y) - isin(x) \cdot sinh(y)$.

(5) יהי $D \subseteq \mathbb{C}$ תחום פתוח וקשיר מסילתית. תהי $f = u + iv \in \mathcal{O}(D)$. הוכיחו:

(א) אם $u = const$ אז $f = const$.

(ב) אם $|f| = const$ אז $f = const$.

(ג) אם $arg(f) = const$. אז $f = const$.

(ד) אם $u \cdot v = const$ אז $f = const$.

(ה) אם $f(z), \overline{f(z)} \in \mathcal{O}(D)$ אז $f = const$.

(6) (א) תהי $f \in \mathcal{O}(D)$ ונניח שמתקיים: $a \cdot u(z) + b \cdot v(z) + c = 0$. מצאו את f.

(ב) תארו את כל הפונקציות ההולומורפיות $f = u + iv$ שעבורן

i. $u(x,y) = x^2 - y^2$, ii. $u(x,y) = x^2 + y^2$, iii. $f(x,y) = u(x) + iv(y)$, iv. $|f(x,y)| = e^y$,

v. $arg(f(x,y)) = -xy$.