יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2017 (מרצה: ד.קרנר)

תרגיל בית מס' 3.

(1) נניח ש $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ מקיימת: $f'(z) = f(z)$, $f(0) = 1$. הוכיחו: $f(z) = e^z$.
(רמז: התבוננו ב $f(z)e^{-z}$)

(2) (א) מצאו את כל הנקודות בהן הטורים מתכנסים: i. $\sum \frac{z^n}{n^{1+s}}$, $s > 0$, ii. $\sum z^n$.

(ב) הוכיחו שקבוצת כל הנקודות בהן הטור $\sum \frac{z^n}{n}$ מתכנס הינה לא פתוחה ולא סגורה.

(ג) מצאו טור חזקות המתכנס לפונקציה f אשר מקיימת: $f(z^2) = z + f(z)$. מהו תחום ההתכנסות?

(ד) הוכיחו שהטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$ מתכנס עבור כל $z \notin \mathbb{N}$.
הוכיחו שההתכנסות היא במ"ש על כל קבוצה קומפקטית הזרה ל $\mathbb{N}$.

(ה) מצאו את רדיוס ההתכנסות של: i. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2+i)^n z^n$, ii. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n!) z^{n!}$.

(ו) הוכיחו ש $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k z^k$ פונקציה הולומורפית עבור $|z| < 1$.

(ז) הוכיחו ש $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+z}$ פונקציה רציפה עבור $Re(z) > 0$.

(ח) פתחו את $\frac{2i}{2+i+z}$ לטורי חזקות סביב $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = i$ ומצאו את רדיוסי התכנסות שלהם.

(3) (א) הוכיחו שטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ מתכנס ב $\mathbb{C}$ כולו, ומגדיר פונקציה הולומורפית. הוכיחו $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.
(חזרו על שתי ההוכחות שניתנו בהרצאה)

(ב) הגדרנו פונקציות: $sin(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2i}$, $cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$. בדקו שטורים $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ ו $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ מגדירים פונקציות הולומורפיות ב $\mathbb{C}$ כולו. הוכיחו שהפונקציות הן $sin(z)$, $cos(z)$.

(4) נגדיר $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, עם המקדמים ממשיים, $a_n \in \mathbb{R}$. נניח שהטור מתכנס ב $D_r(0)$, שהוא תחום ההגדרה של $f(z)$.
(כאן ייתכן גם $r = \infty$, אז f מוגדרת ב $\mathbb{C}$ כולו).

(א) נניח ש f מתאפסת באיזשהו קטע ממשי $(-\epsilon, \epsilon) \in \mathbb{R}$. הוכיחו ש $f(z) \equiv 0$ ב $D_r(0)$.

(ב) נגדיר את הצמצום של f לציר ממשי: $(-r, r) \overset{g(x)=f(x)}{\to} \mathbb{R}$. נניח ש g מקיימת משוואה $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \partial_x^k g(x) + c_0 = 0$, $\{c_j \in \mathbb{R}\}$. הוכיחו כי f מקיימת את המשוואה $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \partial_z^k f(z) + c_0 = 0$.

(5) רשמו בצורה מפורשת את הפונקציה שאליה מתכנס הטור: i. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, ii. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$.

(6) (א) נגדיר קטע סגור $[a,b] \subset \mathbb{C}$ ע"י פרמטריזציה: $[a,b] := \{(1-t)a + tb|\ t \in [0,1]\}$. הגדירו (בדומה) את הקטעים (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$. הוכיחו: $z \in (a,b)$ אמ"ם $\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}_{<0}$.
נסחו והוכיחו טענות דומות עבור $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$.

(ב) ציירו את העקומות הבאות:
i. $\{z(t) = z_0 + re^{it}|\ t \in [0, 2\pi]\}$, ii. $\{z(t) = z_0 + r_x cos(t) + i r_y sin(t),\ t \in [0, 2\pi]\}$

(7) במקרים הבאים ציירו את השפה של התחום ובכל נקודה של שפה ציינו את הכיוון החיובי.
i. $\{z = x + iy|\ |x - x_0| \le a,\ \ |y - y_0| \le b\}$, ii. $\bigcup\limits_{n=1}^{10} \{2n < |z| < 2n+1\}$.