יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2017 (מרצה: ד.קרנר)

תרגיל בית מס' 4.

(1) (א) נסמן ע"י γ את המשולש על קודקודים $0,1,i$. (הכיוון חיובי). חשבו את האינטגרלים הבאים:
i. $\oint_\gamma z^n dz$, $n\in\mathbb{N}$, ii. $\oint_\gamma \overline{z}^n dz$, $n\in\mathbb{N}$.

(ב) תהי γ החצי קשת העליונה של $\partial\big(D_1(0)\big)$. (הכיוון - נגד כיוון השעון). חשבו את האינטגרלים הבאים:
i. $\int_\gamma (x^2-iy^2)dz$, ii. $\int_\gamma \overline{z}dz$, iii. $\int_\gamma (x^2-y^2+2ixy)dz$.

(ג) חשבו $\oint_{|z|=r} z^n dz$, $n\in\mathbb{Z}$, הכיוון חיובי.

(ד) יהי $D\subset\mathbb{C}$ תחום חסום עם שפה ∂D חלקה למקוטעין (הכיוון חיובי). הוכיחו: $\int_{\partial D}\overline{z}dz = 2i\cdot Area(D)$.

(2) (א) תהי $\mathbb{C}\xrightarrow{f}\mathbb{C}$ פונקציה רציפה, המקיימת: $\lim_{R\to\infty}\left(\max_{|z|=R}|f(z)|\right)=0$.
הראו שלכל $a>0$ מתקיים: $\lim_{R\to\infty}\int_{|z|=R,\ Im(z)\geq 0} e^{iaz}f(z)dz=0$.

(ב) בסעיף (א) דיברנו על חצי-מעגל העליון. האם אותה טענה נכונה גם עבור חצי-מעגל התחתון? (רמז: $f(z)=\frac{1}{z}$).

(ג) יהיו p,q שני פולינומים, כך ש $deg(q)\geq deg(p)+2$. יהיו $0\leq\theta_1<\theta_2\leq\pi$ ונגדיר מסילה $[\theta_1,\theta_2]\xrightarrow{\gamma_R}\mathbb{C}$ ע"י $\gamma_R(t)=Re^{it}$. הוכיחו: $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{p(z)}{q(z)}dz=0$.

(ד) בדקו שהתנאי $deg(q)\geq deg(p)+2$ הכרחי , כלומר תנו דוגמא עם $deg(q)\geq deg(p)+1$ שעבורה המסקנה הקודמת לא מתקיימת.

(ה) סימון: $H^+=\{z\in\mathbb{C}|\ Im(z)>0\}$. נקבע מסילה $[0,\pi]\xrightarrow{\gamma_R}\mathbb{C}$, $\gamma_r(t)=Re^{it}$. תהי $H^+\xrightarrow{f}\mathbb{C}$ פונקציה רציפה המקיימת: $|f(z)|<\frac{M}{|z|^{1+\epsilon}}$, עבור $|z|>C$ וקבועים $C,M,\epsilon>0$. הוכיחו: $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}f(z)dz=0$.

(3) (א) נניח שהטור $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ מתכנס בתחום $D_{2R}(0)\subset\mathbb{C}$. נבחר מסילה $[0,1]\xrightarrow{\gamma}D_R(0)$. הראו כי:
i. הסדרה $c_k=\sum_{n=0}^{k}a_n\int_\gamma z^ndz$ מתכנסת. ii. $\int_\gamma f(z)dz=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_\gamma z^ndz$.

(ב) נניח שרדיוס ההתכנסות של $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ הינו $R>0$. הוכיחו שעבור כל $r<R$ מתקיים:
$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}$.

(ג) בהינתן $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, ניקח את הקטע הישר $[z_1,z_2]\subset\mathbb{C}$. נניח שרדיוס ההתכנסות של הטור $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ הוא $r>1$. לכל $|z|<1$ נגדיר $A(z)=\frac{\int_{[0,z]}f(s)ds}{1-z}$. הראו כי $A(z)$ הינה פונקציה הולומורפית בתחום $D_1(0)$ והפיתוח שלה לטור חזקות סביב 0 הוא $A(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{n}\frac{a_j}{j+1})z^n$.

(4) (א) חשבו $\int_0^T e^{ax}cos(bx)dx$, $\int_0^T e^{ax}sin(bx)dx$, $a,b,T\in\mathbb{R}$. (רמז: התבוננו ב $\int e^z$ לאורך קטע $[0,(a+bi)T]\subset\mathbb{C}$.)

(ב) חשבו $\int_\gamma e^zdz$ עבור מסילות $\gamma=\{z=x+iy|y=x^\alpha,\ x\in[0,1]\}$. כאן $\alpha>0$ כלשהו.

(5) עבור פונקציות הבאות ותחומים הבאים קבעו האם לפונקציה קיימת פונקציה קדומה בתחום:
א. $\frac{1}{z^n}$, ב. $\frac{sin(z)}{z}$, ג. $\frac{e^z-1}{z}$, ד. $\frac{1}{z^2+z+1}$, ה. $\frac{cos(z)}{z}$.
i. $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, ii. $\{|Im(z)|>1\}$, iii. $\{|Im(z)|<1\}$, iv. $\{|z-e^{\frac{2\pi i}{3}}|<\frac{1}{2}\}$,
v. $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leq 0}$, כאשר $\mathbb{R}_{\leq 0}:=\{x|\ Im(x)=0,\ Re(x)\leq 0\}\subset\mathbb{C}$.