יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2017 (מרצה: ד.קרנר)

תרגיל בית מס' 5.

(1) נבחר את הענף הראשי של log.

(א) תארו את התמונה של log. האם log היא פונקציה חח"ע?

(ב) הוכיחו/הפריכו:

i. $log(e^z) = z$, ii. $e^{log(z)} = z$, iii. $log(e^{z+2\pi i}) = z + 2\pi i$, iv. $log(zw) = log(z) + log(w)$,

v. נניח ש z, w, zw הם בתחום הגדרה של log אז $log(zw) = log(z) + log(w)$,

vi. אם $Re(z), Re(w) > 0$ אז $log(zw) = log(z) + log(w)$, vii. $log\frac{1}{z} = -log(z)$.

(ג) חשבו $\int\limits_{\substack{|z|=1\\ z\neq -1}} \frac{log(z)}{z}dz$.

(ד) נקבע $a, b \in \mathbb{C}$ כך ש $a \neq b$. (נזכיר: $z \in (a,b)$ אמ"ם $\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}_{<0}$.) בעזרת הענף הראשי של log נגדיר פונקציה $F(z) = log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$ בתחום $\mathbb{C} \setminus [a,b]$.

(i) בדקו ש F מוגדרת היטב (חד-ערכית) והולומורפית.

(ii) הוכיחו ש $F(z)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(z) = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}$ בתחום $\mathbb{C} \setminus [a,b]$.
האם לפונצקיה $f(z)$ קיימת קדומה בתחום $\mathbb{C} \setminus \{a,b\}$? (אם כן - מצאו אחת, אחרת - הוכיחו שאין)

(ה) תהי $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ כך ש f' רציפה ב $\mathcal{U}$. תהי $\gamma \subset \mathcal{U}$ מסילה סגורה. נניח ש f מקיימת על γ: $|f(z) - 1| < 1$.
הוכיחו: $\int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0$.

(2) (א) תהי $[0,1] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{C}$ מסילה שלא עוברת דרך 0.

(i) הראו שקיימת מסילה $[0,1] \xrightarrow{\delta} \mathbb{C}$ כך ש $\gamma(t) = e^{\delta(t)}$ לכל $t \in [0,1]$.
(ניתן להשתמש בעובדה: עבור כל $\epsilon > 0$ קיימת חלוקה $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ כך שתמונה של כל קטע $[t_i, t_{i+1}]$ נמצאת בתוך (איזשהו) דיסק ברדיוס ϵ.)

(ii) נניח ש γ מסילה סגורה, האם δ בהכרח מסילה סגורה?

(iii) הראו שמסילה $[0,1] \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}$ מקיימת $\gamma(t) = e^{\beta(t)}$ אמ"ם קיים $n \in \mathbb{Z}$ כך ש $\beta(t) - \delta(t) = 2\pi i n$.

(ב) תהי $[0,1] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{C}$ מסילה שלא עוברת דרך נקודה w.

(i) הראו שקיימת מסילה $[0,1] \xrightarrow{\delta} \mathbb{C}$ כך ש $\gamma(t) - w = e^{\delta(t)}$ לכל $t \in [0,1]$.

(ii) הראו ש $\delta(t)$ נקבעת בצורה יחידה אם קובעים "תנאי-התחלה", $\delta(0)$.

(ג) בהינתן מסילה γ שלא עוברת דרך נקודה w, נגדיר את אינדקס של γ ביחס ל w ע"י $\eta(\gamma, w) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-w}$.
(שם אחר למספר זה: $winding\ number$.)

(i) חשבו את $\eta(\gamma, 0)$ עבור $\gamma = \{e^{2\pi itn},\ t \in [0,1]\}$. כאן $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) חשבו את $\eta(\gamma, w)$ עבור $\gamma = \{w + e^{2\pi itn},\ t \in [0,1]\}$.

(iii) נניח ש $|w| > 1$. חשבו את $\eta(\gamma, w)$ עבור $\gamma = \{e^{2\pi itn},\ t \in [0,1]\}$.

(iv) נניח ש $|w| < 1$. חשבו את $\eta(\gamma, w)$ עבור $\gamma = \{e^{2\pi itn},\ t \in [0,1]\}$.

(v) נניח ש γ הנה מסילה סגורה. הוכיחו ש $\eta(\gamma, w)$ מספר שלם. (רמז: מהם הערכים האפשריים של $\delta(1) - \delta(0)$?)

(vi) יהי $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ תחום חסום, קשיר ופשוט-קשר. נניח ש $a \notin \overline{\mathcal{U}}$. הוכיחו: $\eta(\partial\mathcal{U}, a) = 0$.

(ד) תהיינה $[0,1] \xrightarrow{\gamma_1, \gamma_2} \mathbb{C}$ שתי מסילות המקיימות $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. נגדיר מסילה חדשה, $[0,1] \xrightarrow{\gamma_2 * \gamma_1} \mathbb{C}$, שתיקרא השרשור של המסילות, ע"י:

$$(\gamma_2 * \gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

נניח ש γ_1, γ_2 מסילות סגורות שלא עוברות דרך a. הוכיחו: $\eta(\gamma_2 * \gamma_1, a) = \eta(\gamma_2, a) + \eta(\gamma_1, a)$.

(3) (א) תהי $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ ונניח ש $\overline{D_r(a)} \subset \mathcal{U}$. נניח ש f מקבלת ערכים ממשיים על $\partial D_r(a)$. הוכיחו: $f(a) \in \mathbb{R}$.

(ב) תהי $f \in \mathcal{O}(\overline{D_r(0)})$ ונניח ש f חסומה על $\{|z| = r\}$ בצורה הבאה: $|f| \le a$ על חצי המעגל העליון, ו $|f| \le b$ על חצי המעגל התחתון. הוכיחו: $|f(0)| \le \sqrt{ab}$. (רמז: השתמשו ב $f(z)f(-z)$.)