יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2017 (מרצה: ד.קרנר)

תרגיל בית מס' 6.

(1) חשבו אינטגרלים הבאים (הציגו אותם כאינטגרלים של פונקציה מרוכבת על מסילה סגורה)

.i $\int_0^{2\pi} \frac{cos^2(t)dt}{1+sin^2(t)}$, .ii $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+bcos(t))^2}$, כאשר $a>b>0$.

(2) (א) במקרים הבאים קבלו פיתוח לטור טיילור ומצאו את תחום התכנסות שלו:

.i $f(z)=sin(z+1)$ ליד $z_0=0$, .ii $f(z)=\frac{sin(z)}{z^2+z+1}$ ליד $z_0=0$, וליד $z_0=1$.

(ב) פונקציה $\mathbb{C} \xrightarrow{f} D_r(0)$ נקראת (אי-)זוגית אם מתקיים $f(z)=\pm f(-z)$ עבור כל $z\in D_r(0)$.

(i) אילו מבין e^z, $cos(z)$, $sin(z)$, $ln(z\overline{z})$, $\sqrt{z\overline{z}}$ הן (אי-)זוגיות?

(ii) הוכיחו שכל פונקציה $\mathbb{C} \xrightarrow{f} D_r(0)$ ניתנת לייצוג כ $f=f_+ + f_-$ כאשר f_+ זוגית ו f_- אי-זוגית.

(iii) הוכיחו: אם $f\in\mathcal{O}(D_r(0))$ הנה (אי-)זוגית אז בפיתוח טיילור שלה, בנקודה $z=0$, משתתפות רק חזקות (אי-)זוגיות.

(3) (א) תהי $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ ונניח שמתקיים $|f|\leq a+b|z|^k$. הוכיחו ש f הינה פולינום מדרגה $deg(f)\leq k$. הכוונה:

.i הוכיחו: אם $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ אז $f_{-1}(z)=\begin{cases}\frac{f(z)-f(0)}{z}, & z\neq 0\\ f'(0), & z=0\end{cases}$ הינה גם פונקציה שלמה.

.ii הוכיחו: אם $|f|\leq a+b|z|^k$, עבור כל $k>0$ אז $f_{-1}(z)\leq\tilde{a}+\tilde{b}|z|^{k-1}$.

(ב) תהי $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ ונניח ש $|f(z)|>|z|^N$ עבור $|z|$ מספיק גדול. הוכיחו ש f היא פולינום, מדרגה גדולה מ N.

(ג) יהי $\tau\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ ותהי $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ המקיימת: $f(z+1)=f(z)$, $f(z+\tau)=f(z)$ (כלומר f היא פונקציה דו-מחזורית). הוכיחו ש f פונקציה קבועה.

(ד) מצאו את כל הפונקציות השלמות המקיימות: $|f'(z)|\leq C(1+\sqrt{|z|})$, עבור C קבוע.

(ה) נוכיח את הטענה: אם $\mathbb{C}\xrightarrow{f}\mathbb{C}$ הינה פונקציה שלמה, אז התמונה $f(\mathbb{C})\subset\mathbb{C}$ הינה קבוצה צפופה. (כלומר $\overline{f(\mathbb{C})}=\mathbb{C}$)

(i) הוכיחו: אם קיים $r>0$ כך ש $|f(z)|>r$ לכל $z\in\mathbb{C}$ אז $f(z)$ קבועה.

(ii) הסיקו: אם קיים $r>0$ ו $a\in\mathbb{C}$ כך ש $|f(z)-a|>r$ לכל $z\in\mathbb{C}$ אז $f(z)$ קבועה. הסיקו את הטענה.

(4) תהי $f\in\mathcal{O}(\mathcal{U})$ ונניח שריבוי שלה בנקודה $a\in\mathcal{U}$ הנו p. הוכיחו: $f(z)=(z-a)^p g(z)$ כאשר $g\in\mathcal{O}(\mathcal{U})$ ו $g(a)\neq 0$.

(5) (א) (שיטה אחת להכליל זהויות ממשיות למקרה מרוכב) הוכיחו את הזהות $e^{z+w}=e^z e^w$ בדרך הבאה.

(i) נקבע $w\in\mathbb{R}$ כפארמטר . ההפרש $e^{z+w}-e^z e^w$ מתאפס עבור כל $z\in\mathbb{R}$. הסיקו מכאן (בגלל שזאת פונקציה הולומורפית) שההפרש מתאפס זהותית.

(ii) בשלב זה קיבלנו את $e^{z+w}=e^z e^w$ עבור כל $z\in\mathbb{C}$ ו $w\in\mathbb{R}$. השתמשו באותו שיקול כדי להגיע למקרה כללי, $z,w\in\mathbb{C}$.

(ב) בצורה דומה הוכיחו: $sin(z+w)=sin(z)cos(w)+cos(z)in(w)$,
$cos(z+w)=cos(z)cos(w)-sin(z)sin(w)$ עבור כל $z,w\in\mathbb{C}$.

(ג) נגדיר סדרת פונקציות $f_n(z)=(1+\frac{z}{n})^n$. בהרצאה הוכחנו (ע"י חישוב ישיר): $\{f_n(z)\}\to e^z$. עכשיו ניתן להוכיח זאת בצורה קצרה יותר.

(i) הוכיחו שעבור כל $R>0$ הסדרה $\{f_n\}_{n=1\dots\infty}$ מתכנסת במ"ש ב $D_R(0)$. נסמן את הגבול ע"י f.

(ii) הראו ש $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ ומתקיים $f(z)=e^z$. (תבדקו $f(z)$ על ממשיים.)

(ד) הוכיחו/הפריכו (ע"י דוגמא נגדית):

(i) קיימת $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ כך ש $\{f(\frac{1}{n})=0\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f(i)=1$.

(ii) תהי $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ פונקציה המקיימת $f(n)=0$, לכל $n\in\mathbb{Z}$. אז $f(z)\equiv 0$.

(iii) תהי $f\in\mathcal{O}(D_2(0))$ ונניח שעבור כל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\oint\limits_{|z|=1}\frac{f(z)dz}{(n+1)z-1}=0$. אז $f\equiv 0$.