יסודות תורת הפונקציות המרוכבות, (להנדסת חשמל) 201.1.0071

אביב 2017 (מרצה: ד.קרנר)

תרגיל בית מס' 7.

(1) (א) מצאו min, max של פונקציה $|z^4 - z|$ בתוך $\{|z| \le 1\}$.

(ב) נסמן $[0, 2\pi]^2 := \{x + iy \in \mathbb{C}| \ x, y \in [0, 2\pi]\}$. מצאו $\max\limits_{z\in[0,2\pi]^2} |sin(z)|$.

(ג) תהיינה $f, g \in \mathcal{O}(\overline{\mathcal{U}})$. הוכיחו ש $max(|f| + |g|)$ מתקבל ב $\partial\mathcal{U}$. (רמז: תתבוננו ב $e^{i\alpha}f + e^{i\beta}g$)

(ד) (i) יהי $|a| \neq 1$. הראו כי לכל z המקיים $|z| = 1$ מתקיים: $|z - a| = |1 - \bar{a}z|$.

(ii) תהיינה $|a_1|, \dots, |a_n| < 1$. נגדיר $f(z) = \frac{(z-a_1)\cdots(z-a_n)}{(1-\bar{a}_1 z)\cdots(1-\bar{a}_n z)}$. הוכיחו ש $|f(z)| < 1$ לכל $|z| < 1$.

(ה) הוכיחו את עקרון ה min. תהי $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ לא קבוע. תהי $a \in \mathcal{U}$ ונניח ש $f(a) \neq 0$. אז a היא לא נקודת min מקומי של $|f(z)|$.

(ו) תהי $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ לא קבועה. הוכיחו שפונצקיות $Re(f)$, $Im(f)$ לא מקבלות min/max מקומיים ב $\mathcal{U}$.

(2) (א) תהי $f \in \mathcal{O}(D_1(0))$ המקיימת: $f(0) = 0$, $|f(z)| \le 1$ עבור כל $z \in D_1(0)$.
הוכיחו ש $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(z^n)$ מתכנס במ"ש ב $D_r(0)$ עבור כל $r < 1$.

(ב) תהי $D_1(0) \xrightarrow{f} D_1(0)$ המקיימת: $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. הוכיחו: $f(z) \equiv z$.

(3) (א) פתחו את הפונקציות הבאות לטורי לורן סביב הראשית בכל הטבעות בהן מוגדרת הפונקציה:
i. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$, ii. $(z^3 + z^5)e^{\frac{1}{z}}$, iii. $\frac{sin\frac{1}{z}}{z}$, iv. $f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z^3}$.

(ב) (i) יהי $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ פיתוח לורן של $\frac{e^z}{z(z^2+1)}$ בתחום $0 < |z| < 1$. מצאו $a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2$.

(ii) יהי $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ פיתוח לורן של $\frac{e^{z^2}}{1-cos(z)}$ בתחום $0 < |z| < \pi$. מצאו $a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3$.

(ג) תהי $f(z) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ ונניח שעל מעגל $\{|z| = r\}$ מתקיים $|f(z)| \le C$. הוכיחו: $|a_n| \le \frac{C}{r^n}$ עבור כל $n \in \mathbb{Z}$.

(ד) נגדיר $q = e^{2\pi i\alpha}$ כאשר $\alpha \in (0, 1)$ לא רציונלי. נקבע $0 \ge r < R$, $\mathcal{U} = \{z| \ r < |z| < R\}$. מצאו את כל הפונקציות $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ המקיימות: $f(z) = f(qz)$ עבור כל $z \in \mathcal{U}$.

(4) תהי $\mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{C}$ פונקציה רציפה ומחזורית, עם מחזור 2π. נגדיר $\partial D_1(0) \xrightarrow{g} \mathbb{C}$ על-ידי $g(e^{it}) = h(t)$.

מקדמי פורייה של h מוגדרים להיות $\hat{h}(n) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} h(t)e^{-int}dt$.

נגדיר $D_1(0) \xrightarrow{f_1} \mathbb{C}$ על-ידי $f_1(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_1(0)} \frac{g(z)}{z-z_0}dz$, ו $\mathbb{C}\backslash\overline{D_1(0)} \xrightarrow{f_2} \mathbb{C}$ על-ידי $f_2(z_0) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_1(0)} \frac{g(z)}{z-z_0}dz$.

(א) מה הקשר בין מקדמי טור טיילור של f_1 (ב $z = 0$) ומקדמי טור לורן של f_2 (ב $z = 0$) למקדמי פורייה של h?

(ב) נניח שניתן להרחיב את g לפונקציה הולומורפית בטבעת שמכילה את מעגל היחידה.

(i) הראו כי ניתן להרחיב את f_1 לפונקציה הולמורפית ב $D_{1+\epsilon}(0)$ ושניתן להרחיב את f_2 לפונקציה הולומורפית ב $D_{1-\epsilon}(0)$ עבור $\epsilon > 0$ קטן.

(ii) הראו כי $h(t) = f_1(e^{it}) + f_2(e^{it})$.

(5) (א) מצאו ומיינו את כל הנקודות הסינגולריות של פונקציות הבאות. ציינו את סדר של פונקציה בכל נקודה
i. $\frac{e^z}{z-1}$, ii. $\frac{cos(z)}{z+z^3}$, iii. $z^{10}sin\frac{1}{z}$, iv. $\frac{z}{sin(z)}$, v. $\frac{1}{tan(z)} - \frac{1}{sin(z)}$, vi. $cos(e^{\frac{1}{z}})$, vii. $exp(e^{\frac{1}{z}})$.

(ב) תהי $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U} \setminus \{a\})$ הוכיחו: ל f יש אפס ב $z = a$ מסדר n אמ"מ ל $\frac{1}{f}$ יש קוטב ב $z = a$ מסדר $-n$.